

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 27 • HEFT 5 • NOVEMBER 1936

## Strahlungsdämpfung und Feinstruktur der Balmerlinien des Wasserstoffs<sup>1)</sup>

Von J. Meixner

1. In einer größeren Zahl von Arbeiten der letzten Jahre wurde die Feinstruktur der Balmerlinien des leichten und des schweren Wasserstoffs, insbesondere von  $H_a$  und  $D_a$ , untersucht und ein Vergleich durchgeführt mit der Sommerfeldschen Feinstrukturformel. Die Messungen sind dadurch erschwert, daß die Feinstrukturlinien durch den Dopplereffekt verwischt werden, so daß bei den angewandten Temperaturen (flüssige Luft) im wesentlichen nur die beiden Hauptkomponenten aufgelöst werden konnten. Nur beim schweren Wasserstoff gelang es Kopfermann<sup>2)</sup> sowie Williams und Gibbs<sup>3)</sup>, auch noch die stärkste der Nebenkomponenten von  $D_a$  aufzulösen.

Die Messungsergebnisse sind uneinheitlich<sup>4)</sup>; immerhin zeigen verschiedene der Messungen Abweichungen von der Sommerfeldschen Feinstrukturformel im selben Sinn und von derselben Größenordnung: Der Abstand der Schwerpunkte der Dublettkomponenten der Balmerlinien ist gegenüber dem theoretischen Wert um einige Prozent verringert, nämlich im Mittel bei Houston und Hsieh<sup>5)</sup>, Williams und Gibbs<sup>3)</sup>, Kopfermann<sup>2)</sup>, um etwa  $0,010 \text{ cm}^{-1}$ . Während Spedding, Shane und Grace<sup>6)</sup> eine von ihnen früher gefundene ähnliche Abweichung zurücknehmen, haben Williams und Gibbs<sup>7)</sup> kürzlich (wie übrigens früher schon Kopfermann a. a. O.) auch noch die stärkste der drei schwächeren Komponenten von  $D_a$ , die dem Übergang  $j' = \frac{1}{2}$  nach  $j = \frac{1}{2}$  entspricht, aufgelöst und gezeigt, daß ihr Abstand von der kurzwelligeren Hauptkomponente des Dubletts statt theoretisch  $0,108 \text{ cm}^{-1}$  etwa  $0,184 \text{ cm}^{-1}$  beträgt.

Bei dieser Sachlage ist es wichtig zu untersuchen, welche theoretischen Gründe für Abweichungen von der Sommerfeldschen

1) 2. Teil der Gießener Habilitationsschrift.

2) H. Kopfermann, Naturw. 22. S. 218. 1934.

3) R. C. Williams u. R. C. Gibbs, Phys. Rev. 45. S. 475. 1934.

4) Vgl. Tab. 1 in J. Meixner, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 371. 1935.

5) W. V. Houston u. Y. M. Hsieh, Phys. Rev. 45. S. 263. 1934.

6) F. H. Spedding, C. D. Shane u. N. S. Grace, Phys. Rev. 47. S. 38. 1935.

7) R. C. Williams u. R. C. Gibbs, Phys. Rev. 48. S. 971. 1935.

Feinstrukturformel in Frage kommen können. Hier gibt es eine Reihe von Möglichkeiten.

a) Von der Unsicherheit in der Feinstrukturkonstanten kann abgesehen werden; denn sie beträgt höchstens  $0,3\%$ ; das gibt eine Unsicherheit im theoretischen Wert des Abstandes der Schwerpunkte der Doublettkomponenten von höchstens  $0,6\%$ , während die zu erklärenden Diskrepanzen etwa 6—7 mal so groß sind. Der neueste Wert von Birge<sup>1)</sup> für die Feinstrukturkonstante von  $1/137,06$  würde übrigens die bisher angegebenen Diskrepanzen um etwa  $0,0015 \text{ cm}^{-1}$  vergrößern.

b) Der Einfluß des Starkeffektes auf die Emission von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  ist von Heydenburg<sup>2)</sup> untersucht worden. Der Starkeffekt kommt zustande durch das durch die angelegte Spannung in der Entladungsröhre erzeugte elektrische Feld und durch das mittlere elektrische Feld, das die Elektronen in der Entladungsröhre erzeugen. Bei den (leider nur unvollständig angegebenen) Versuchsbedingungen ist die elektrische Feldstärke im mittleren Teil der Entladungsröhre (dessen Emission wird ja nur beobachtet), die durch die angelegte Spannung erzeugt wird, bei Spedding, Shane und Grace sicher weit unter  $100 \text{ Volt/cm}$ , bei Houston und Hsieh (Röhrenlänge  $50 \text{ cm}$ , Röhrenspannung bei  $0,5 \text{ mm He} < 1000 \text{ Volt}$ ) sicher unter  $20 \text{ Volt/cm}$ , da hier ein beträchtlicher Teil der Spannung im Kathodenfall verbraucht wird.

Das Feld, das die Elektronen im Mittel erzeugen, läßt sich abschätzen zu  $F = 33 i^{2/3} V^{-1/3} \text{ Volt/cm}^3$ ;  $i$  = Stromdichte in  $\text{Amp./cm}^2$ ;  $V$  = mittlere Elektronenenergie in Volt. Bei den Stromdichten von  $i \approx 0,03$  bei Houston und Hsieh, sowie Spedding, Shane und Grace und mit der sicher richtigen Annahme  $V > 10$  wird  $F < 1,5 \text{ Volt/cm}$ .

Dem stehen folgende Rechnungsergebnisse von Heydenburg gegenüber: Die Annahme einer elektrischen Feldstärke von  $500 \text{ Volt/cm}$  würde die beobachtete Diskrepanz zwischen Feinstrukturformel und Experiment wenigstens bei  $H_\alpha$  erklären. Dieselbe Feldstärke würde aber bei  $H_\beta$  infolge des stark mit der Hauptquantenzahl ansteigenden Starkeffektes das Linienbild bereits so verändert haben, daß dies der Beobachtung nicht hätte entgehen können. Felder bis zu  $100 \text{ Volt/cm}$  haben jedoch bei  $H_\beta$  und erst recht bei  $H_\alpha$  keinen genügenden Einfluß auf das Linienbild. (Auch die oben erwähnte Abweichung, die von

1) R. T. Birge, Phys. Rev. **48**, S. 918. 1935.

2) N. P. Heydenburg, Phys. Rev. **46**, S. 1069. 1934.

3) Vgl. H. Bethe, Handb. d. Physik von Geiger u. Scheel, 2. Aufl., Bd. XXIV/1, S. 457.

Williams und Gibbs vor kurzem beobachtet wurde, scheint uns zu groß, um sie auf den Starkeffekt zurückführen zu können, wie diese Verff. es vermuten. Leider geben sie die Daten der Entladungsröhre nicht an.) Der Starkeffekt kann also, wenigstens bei den Linien  $H_\alpha$  und  $H_\beta$ , höchstens zu einem sehr geringen Teil für die beobachteten Diskrepanzen verantwortlich erklärt werden.

c) Das magnetische Moment des Protons, bzw. Deutons gibt eine Aufspaltung der Feinstruktur, die Hyperfeinstruktur. Sie gibt jedoch keinen Einfluß auf die beobachtbare Linienstruktur<sup>1)</sup>.

d) Auch eine genauere Berücksichtigung der Kernmitbewegung, d. h. ihrer relativistischen Effekte, gibt nur eine geringe Verschiebung der ganzen Linie (Darwinsche Korrektur), aber keine Änderung der Linienstruktur<sup>1)</sup>. (In der Diracschen Theorie des Wasserstoffatoms wird ja die Kernmitbewegung nur dadurch berücksichtigt, daß an Stelle der Rydbergzahl  $R_\infty$  des unendlich schweren Kerns  $R_H$  bzw.  $R_D$  eingesetzt wird.)

e) Das Coulombsche Gesetz wird in Kernnähe durch den „Elektronenradius“ modifiziert. Ist dieser Elektronenradius von der Größenordnung  $e^2/mc^2$ , so werden die Energieterme um Beträge verschoben, die gegenüber der Meßgenauigkeit belanglos sind. Ist jedoch der Elektronenradius etwa  $14e^2/mc^2$ , wie es Born und Schrödinger<sup>2)</sup> vermutungsweise ausgesprochen haben, und nimmt man das Bornsche Elektronenpotential<sup>3)</sup>, so ergeben sich Termverschiebungen, die in Größenordnung und Richtung mit den experimentell gefundenen einigermaßen übereinstimmen<sup>4)</sup>. Auf die Wahrscheinlichkeit dieser theoretischen Möglichkeit wird unten noch eingegangen werden.

f) Eine geringe Abweichung in Kernnähe vom Coulombschen Gesetz ergibt sich ebenfalls aus der Polarisation des Vakuums durch die besetzten Elektronenzustände negativer Energie. Dadurch rücken aber die Schwerpunkte der Dublettkomponenten auseinander statt zusammen, wie es den Experimenten entsprechen würde. Außerdem ist die Änderung höchstens  $0,001 \text{ cm}^{-1}$ , während die Experimente etwa 10 mal größere Werte ergeben<sup>5)</sup>.

Allgemein läßt sich sagen, daß irgendeine plausible Änderung der Wechselwirkung zwischen Proton bzw. Deuton und Elektron

1) K. Bechert u. J. Meixner, Ann. d. Phys. [5] **22**, S. 525. 1935.  
2) M. Born u. E. Schrödinger, Nature **135**, S. 342. 1935.  
3) M. Born, Proc. Roy. Soc. London A. **143**, S. 410. 1934; M. Born u. L. Infeld, ebenda **144**, S. 425. 1934.  
4) J. Meixner, a. a. O.  
5) E. A. Uehling, Phys. Rev. **48**, S. 55. 1935.

gegenüber dem Coulombschen Gesetz bei geringeren Abständen als  $10^{-12}$  cm Korrekturen der Schwerpunkte der Dublettkomponenten von höchstens  $0,0005 \text{ cm}^{-1}$  gibt.

g) Die Wechselwirkung eines strahlenden Atoms mit dem Strahlungsfeld gibt eine Linienverbreiterung, die sog. Dämpfungsbreite. Die Frequenz des Schwerpunkts der verbreiterten Linie entspricht jedoch genau der Termdifferenz der aus den stationären Schrödinger- bzw. Diracschen Gleichung berechneten Eigenwerte. Das gilt nicht mehr, wenn Ausgangs- und Endniveau des Atoms schwach aufgespalten sind und dadurch Linien entstehen, deren Abstände mit der Dämpfungsbreite vergleichbar werden. Indessen verschwinden die dadurch bewirkten Änderungen im Falle von  $H_a$  bzw.  $D_a$ , wie in der folgenden Untersuchung gezeigt werden soll. Houston und Hsieh sehen zwar als mutmaßliche Ursache für die Diskrepanz zwischen ihren Versuchsergebnissen und der Sommerfeldschen Feinstrukturformel die Verbreiterung der Linien von  $n = 3$  nach  $2p$  durch die große Breite des Übergangs  $2p \rightarrow 1s$  von  $0,003 \text{ cm}^{-1}$  (nicht  $0,020 \text{ cm}^{-1}$ , wie bei ihnen angegeben) an; jedoch ist diese Verbreiterung mit keiner Verschiebung des Schwerpunkts verbunden, so daß ihre Vermutung hinfällig wird.

h) Ist das strahlende Atom von Atomen oder Molekülen eines fremden Gases umgeben, so bewirken die van der Waalsschen Kräfte Energiestörungen, die aber bei den geringen Drucken z. B. der Versuche von Houston und Hsieh (0,5 mm He-Zusatz in der Entladungsröhre) bedeutungslos sind. — Die Energiestörung durch Resonanzwechselwirkung zwischen gleichartigen Atomen ist zwar wesentlich größer als die durch die van der Waalsschen Kräfte zwischen ungleichartigen, ist aber bei den geringen Wasserstoffdrucken in den Entladungsröhren immer noch kleiner als  $0,0001 \text{ cm}^{-1}$ , also für uns belanglos<sup>1)</sup>.

i) Ein weiterer Einfluß auf die Linienform ist zu erwarten, wenn zwei benachbarte Atome gleichzeitig angeregt sind, nahe dieselben Frequenzen ausstrahlen und das Strahlungsfeld des ersten Atoms auf das zweite wirkt und umgekehrt. Auch dieser Fall wird im folgenden untersucht und sein Einfluß bei den experimentellen Bedingungen als bedeutungslos gegenüber den beobachteten Diskrepanzen zwischen den Messungen und der Sommerfeldschen Feinstrukturformel erkannt.

2. Der Vorgang der Emission eines Lichtquants aus einem nichtentarteten angeregten Zustand in den nicht entarteten Grund-

1) Vgl. z. B. H. Margenau u. W. W. Watson, Rev. Mod. Phys. 8. S. 22. 1936.

zustand ist von Weisskopf und Wigner<sup>1)</sup> auf Grund der Diracschen Strahlungstheorie behandelt worden. Es ergibt sich eine Verbreiterung der Linie, wie sie aus der Elektronentheorie schon bekannt war; der Schwerpunkt der Linie bleibt aber trotz der Kopplung von Atom und Strahlungsfeld an der Stelle, die dem Energieunterschied von angeregtem und Grundzustand entspricht. Dies gilt jedoch nicht mehr, wenn die beiden Zustände aufgespalten sind und wenn die Aufspaltungen gegenüber den Dämpfungsbreiten nicht zu groß sind.

Zur theoretischen Behandlung der dabei auftretenden Verhältnisse seien drei aufgespaltene Zustände  $a$ ,  $b$ ,  $c$  angenommen.  $a$  soll dem höchsten der drei Zustände,  $c$  dem Grundzustand zugeordnet sein (entsprechend den Zuständen des Wasserstoffatoms mit den Hauptquantenzahlen  $n = 3, 2, 1$ ). Von  $a$  nach  $c$  sei kein direkter Übergang möglich. Die Energiedifferenzen der Übergänge von  $a$  nach  $b$  seien wesentlich verschieden von denen der Übergänge von  $b$  nach  $c$ . Ein Lichtquant, das bei einem Übergang  $a \rightarrow b$ , bzw.  $b \rightarrow c$  ausgesandt wird, heiße  $\varrho$  bzw.  $\sigma$ . In den Grundgleichungen der Strahlungstheorie treten dann folgende Wahrscheinlichkeitsamplituden auf:  $C(a')$ : Atom im Teilniveau  $a'$  von  $a$ . Kein Lichtquant vorhanden.  $C(b'\varrho)$ : Atom im Teilniveau  $b'$  von  $b$ . Lichtquant  $\varrho$  im Hohlraum.  $C(c'\varrho\sigma)$ : Atom im Teilniveau  $c'$  von  $c$ . Lichtquanten  $\varrho$  und  $\sigma$  im Hohlraum.

Die Gleichungen für die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsamplituden lauten dann<sup>2)</sup>:

$$(1a) \quad \dot{C}(a') = \sum_{b'\varrho} D_{\varrho}^{a'b'} \cdot C(b'\varrho) e^{i[\omega(a') - \omega(b') - \omega(\varrho)]t},$$

$$(1b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{C}(b'\varrho) = - \sum_{a'} D_{\varrho}^{a'b'} \cdot C(a') e^{i[-\omega(a') + \omega(b') + \omega(\varrho)]t} \\ \quad + \sum_{c'\sigma} D_{\sigma}^{b'c'} C(c'\varrho\sigma) e^{i[\omega(b') - \omega(c') - \omega(\sigma)]t}, \end{array} \right.$$

$$(1c) \quad \dot{C}(c'\varrho\sigma) = - \sum_{b'} D_{\sigma}^{b'c'} \cdot C(b'\varrho) e^{i[-\omega(b') + \omega(c') + \omega(\sigma)]t}.$$

$\hbar\omega(a')$  ist der Wert des Energieterms  $a'$  (Nullpunkt der Energiezählung beliebig),  $\omega(\varrho)$  die Kreisfrequenz des Lichtquants  $\varrho$  usw.

1) V. Weisskopf u. E. Wigner, Ztschr. Phys. **63**, S. 54. 1930.

2) Vgl. z. B. die zusammenfassenden Berichte von E. Fermi, Rev. Mod. Phys. **4**, S. 87. 1932 und G. Breit, Rev. Mod. Phys. **5**, S. 91. 1933.

Ferner ist

$$D_{\varrho}^{a' b'} = \frac{2e}{m} \left( \frac{\hbar \pi}{V \omega(\varrho)} \right)^{1/2} \left( \vec{A}_{\varrho} \cdot \int \sin \Gamma_{\varrho} \psi_{a'}^* \operatorname{grad} \psi_{b'} dx dy dz \right) = - D_{\varrho}^{b' a'*}$$

$\vec{A}_{\varrho}$  = Einheitsvektor in der Polarisationsrichtung der Hohlraumschwingung  $\varrho$ .  $\Gamma_{\varrho}$  = Phase der Hohlraumschwingung  $\varrho$  an der Stelle  $x, y, z$ .  $\psi_{a'}(x, y, z)$  = Atomeigenfunktion des Zustandes  $a'$ ,  $V$  = Hohlraumvolumen.

Die Gl. (1) sind zu lösen mit der Anfangsbedingung, daß zur Zeit  $t = 0$   $C_0(b' \varrho) = C_0(c' \varrho \sigma) = 0$ , während für  $C_0(a')$  irgendwelche Werte vorgeschrieben sein sollen derart, daß  $\sum_{a'} C_0^*(a') C_0(a') = 1$ ;

d. h., das Atom befindet sich zur Zeit  $t = 0$  sicher in einem der Zustände  $a'$ . In Anwendung der Ansätze von Weisskopf und Wigner<sup>1)</sup> und von Breit und Lowen<sup>2)</sup> wird als Ansatz zur Lösung von (1) nahegelegt:

$$(2a) \quad C_{\bar{a}}(a') = A_{a' \bar{a}} e^{i[\omega(a') - \omega(\bar{a}) + i\gamma(\bar{a})]t},$$

$$(2b) \quad C_{\bar{a}}(b' \varrho) = \sum_{a' \bar{b}} B_{b' \bar{b}} \alpha_{a \bar{b}}^{\varrho} i \cdot \begin{bmatrix} \omega(\bar{b}) - \omega(b') - i\gamma(\bar{b}) \\ \omega(\bar{a}) - \omega(b') - \omega(\varrho) - i\gamma(\bar{a}) \end{bmatrix},$$

$$(2c) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\bar{a}}(c' \varrho \sigma) = \sum_{a' b' \bar{b}} \frac{D_{a}^{b' c'*} B_{b' \bar{b}} \alpha_{a \bar{b}}^{\varrho}}{\omega(\varrho) - \omega(\bar{a}) + \omega(\bar{b}) + i\gamma(\bar{a}) - i\gamma(\bar{b})} \\ \quad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} -\omega(\sigma) - \omega(c') + \omega(b') - i\gamma(\bar{b}) \\ 0 \end{bmatrix} \right. \\ \quad \left. - \begin{bmatrix} -\omega(\sigma) - \omega(\varrho) - \omega(c') + \omega(\bar{a}) - i\gamma(\bar{a}) \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \end{array} \right.$$

mit der Abkürzung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{e^{-ixt} - e^{-iyt}}{y - x}.$$

Die  $a$  und  $\bar{b}$  sind zunächst Hilfsindizes, deren Bedeutung später klar wird. Es gibt zwar ebensoviel  $a$  bzw.  $\bar{b}$  wie  $a'$  bzw.  $b'$ , jedoch besteht zwischen ihnen keine bestimmte Zuordnung.

Die Gl. (1c) ist durch diesen Ansatz bereits erfüllt. Wird (2) in (1a) eingesetzt, so ergibt sich<sup>3)</sup>:

$$(3) \quad A_{a' \bar{a}} [-i\omega(a') + i\omega(\bar{a}) + \gamma(\bar{a})] = \sum_{b' \bar{b} \varrho} \overline{D_{\varrho}^{a' b'}} \alpha_{a \bar{b}}^{\varrho} \frac{\pi}{A \omega(\varrho)} B_{b' \bar{b}}.$$

1) V. Weisskopf u. E. Wigner, Ztschr. f. Phys. **65**, S. 18. 1930.

2) G. Breit u. I. S. Lowen, Phys. Rev. **46**, S. 590. 1934.

3) Zur Ausführung der dabei auftretenden Summen und zur Umgehung der Konvergenzschwierigkeiten vgl. z.B. V. Weisskopf u. E. Wigner, a.a.O., sowie E. Fermi, a.a.O.

Der Querstrich bedeutet Mittelung über alle Phasen, Polarisierungen, Fortschreibungsrichtungen der Lichtwellen im Hohlraum in der Umgebung der Frequenz  $\omega(\varrho) = \omega(a) - \omega(b)$ ;  $\frac{1}{A\omega(\varrho)} =$  Zahl der Hohlraumschwingungen im Einheitsbereich der Frequenz  $\omega(\varrho)$ .

Wird (2) in (1b) eingesetzt, so entstehen die Bedingungen

$$(4) \quad \sum_{a'} D_{\varrho}^{a' b' *} A_{a' \bar{a}} = \sum_{\bar{b}} B_{b' \bar{b}} \alpha_{a \bar{b}}^{\varrho}.$$

$$(5) \quad B_{b' \bar{b}} [-i\omega(b') + i\omega(\bar{b}) + \gamma(\bar{b})] = \sum_{c' b''} D_{\sigma}^{b' c'} D_{\sigma}^{b'' c' *} \frac{\pi}{A\omega(\sigma)} B_{b'' \bar{b}}.$$

Elimination der  $\alpha_{a \bar{b}}^{\varrho}$  aus (3) und (4) führt mit den Abkürzungen:

$$(6) \quad \sum_{b'} D_{\varrho}^{a' b'} D_{\varrho}^{a'' b' *} \frac{\pi}{A\omega(\varrho)} = \gamma^{a' a''}; \quad \sum_{c'} D_{\sigma}^{b' c'} D_{\sigma}^{b'' c' *} \frac{\pi}{A\omega(\sigma)} = \gamma^{b' b''}$$

auf die Gleichungen:

$$(7a) \quad A_{a' \bar{a}} [-i\omega(a') + i\omega(\bar{a}) + \gamma(\bar{a})] = \sum_{a''} \gamma^{a' a''} A_{a'' \bar{a}}.$$

$$(7b) \quad B_{b' \bar{b}} [-i\omega(b') + i\omega(\bar{b}) + \gamma(\bar{b})] = \sum_{b''} \gamma^{b' b''} B_{b'' \bar{b}}.$$

Ist die Matrix  $\gamma^{a' a''}$  eine Diagonalmatrix, so sind die Diagonalelemente die üblichen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Die homogenen Gl. (7a) und (7b) lassen sich dann lösen, wenn ihre Determinanten verschwinden. Das gibt komplexe Lösungen  $\omega(\bar{a}) - i\gamma(\bar{a})$  bzw.  $\omega(\bar{b}) - i\gamma(\bar{b})$ . Ihre Zahl entspricht der Zahl der Teilniveaus von  $a$  bzw.  $b$ . Die  $\omega(\bar{a})$  und  $\gamma(\bar{a})$  sind, wenn  $\gamma^{a' a''}$  keine Diagonalmatrix, im allgemeinen von den  $\omega(a')$  und  $\gamma^{a' a'}$  verschieden (ebenso wie die entsprechenden Größen mit dem Argument  $\bar{b}$  bzw.  $b'$ ). Sind jedoch die Frequenzunterschiede  $\omega(a'') - \omega(a')$  alle groß gegen die  $\gamma^{a' a''}$ , dann sind in der Determinante des Gleichungssystems (7a) nur die Diagonalelemente maßgebend und es folgt daher näherungsweise

$$\omega(\bar{a}) \approx \omega(a'); \quad \gamma(\bar{a}) \approx \gamma^{a' a'}.$$

Aus (7a) ergeben sich zu jedem Werte  $\bar{a}$  Werte  $A_{a' \bar{a}}$ , die noch der Normierungsbedingung

$$(8) \quad \sum_{a'} A_{a' \bar{a}} A_{a' \bar{a}}^* = 1$$

unterworfen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom zur Zeit  $t = 0$  in einem der Zustände  $a'$  war, gleich Eins ist. Die  $B_{b' \bar{b}}$ , die sich aus (7b) ergeben, brauchen nicht normiert zu werden, weil sie immer nur in Verbindung mit den  $\alpha$  vorkommen.

Aus ihnen berechnen sich vermöge (4) die  $\alpha_{a\bar{b}}^{\varrho}$ . Damit ist der Lösungsansatz (2) festgelegt und die Gl. (1) sind durch ihn befreidigt.

Diese eben gefundene Lösung ist gekennzeichnet durch eine bestimmte Abklingungskonstante  $\gamma(a)$ . Die allgemeine Lösung von (1) mit  $C_0(b'\varrho) = C_0(b'\varrho\sigma) = 0$  ergibt sich nun, wenn man die Wahrscheinlichkeitsamplituden (2) mit Zahlen  $A^{\bar{a}}$  multipliziert und über die  $\bar{a}$  summiert. Die  $A^{\bar{a}}$  sind wieder so zu normieren, daß die Wahrscheinlichkeit, das Atom im Zustand  $a$  anzutreffen, gleich Eins wird, d. h.

$$(9) \quad \sum_{a' \bar{a} \bar{a}} A_{a'} A_{\bar{a}}^* A^{\bar{a}} A^{\bar{a}*} = 1.$$

Es interessiert nun die Verteilung der Lichtquanten über die Frequenzen nach langer Zeit ( $t = \infty$ ), wenn das Atom zur Zeit  $t = 0$  in einem durch beliebige  $A^{\bar{a}}$  gekennzeichneten Zustand war. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Endzustand  $c'\varrho\sigma$  ist, unter der Voraussetzung, daß keiner der Zustände  $a$  oder  $b$  metastabil ist,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_a C_{\bar{a}}(c'\varrho\sigma) A^{\bar{a}} \\ = - \sum_{a' b' \bar{a} \bar{b}} \frac{D_{\varrho}^{b' c'^*} B_{b' \bar{b}} \alpha_{a \bar{b}}^{\varrho} A^{\bar{a}}}{[\omega(\sigma) + \omega(c') - \omega(\bar{b}) + i\gamma(\bar{b})][\omega(\sigma) + \omega(\varrho) + \omega(c') - \omega(\bar{a}) + i\gamma(\bar{a})]} \end{array} \right.$$

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Multiplikation mit der konjugiert komplexen Größe. Es soll nun von Phase, Polarisation und Fortschreitungsrichtung der Lichtquanten und vom speziellen Endzustand  $c'$  abgesehen werden; d. h. die Wahrscheinlichkeit ist über alle Phasen, Polarisationen und Richtungen, sowie über alle  $c'$  zu summieren. Es ergibt sich so die Wahrscheinlichkeit  $W$  dafür, daß das Lichtquant  $\varrho$  in einem Bereich  $d\omega(\varrho)$ , das Lichtquant  $\sigma$  in einem Bereich  $d\omega(\sigma)$  und das Atom in irgendeinem Zustand  $c'$  ist. Wird dann noch über alle  $\omega(\sigma)$  integriert, so erhält man gerade die gesuchte Intensitätsverteilung in der „Linie“  $a \rightarrow b$ . Aus (10) folgt dafür:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{c'} d\omega(\varrho) \int W(c'\varrho\sigma) d\omega(\sigma) \\ = \sum_{a' b' \bar{a} \bar{b} a'' b'' \bar{a} \bar{b}} \frac{d\omega(\varrho)}{d\omega(\varrho)} \int D_{\sigma}^{b' c'^*} D_{\sigma}^{b'' c'} \frac{1}{d\omega(\sigma)} \overline{\alpha_{a \bar{b}}^{\varrho} \alpha_{a \bar{b}}^{\varrho*}} \\ \cdot B_{b' \bar{b}} B_{b'' \bar{b}}^* A^{\bar{a}} A^{\bar{a}*} \\ \cdot \frac{d\omega(\sigma)}{[\omega(\sigma) + \omega(c') - \omega(\bar{b}) + i\gamma(\bar{b})][\omega(\sigma) + \omega(\varrho) + \omega(c') - \omega(\bar{a}) + i\gamma(\bar{a})]} \\ \cdot \frac{1}{[\omega(\sigma) + \omega(c') - \omega(\bar{b}) - i\gamma(\bar{b})][\omega(\sigma) + \omega(\varrho) + \omega(c') - \omega(\bar{a}) - i\gamma(\bar{a})]} \end{array} \right.$$

Bei der Integration über  $\omega(\sigma)$  ist zu beachten, daß  $D_{\sigma}^{b'c'} D_{\sigma}^{b''c''}$  eine langsam veränderliche Funktion von  $\omega(\sigma)$  ist; aus der Gestalt des Nenners folgt aber, daß der Beitrag zum Integral im wesentlichen aus der Gegend der Linie  $b \rightarrow c$  stammt. Daher kann in  $D_{\sigma}^{b'c'} D_{\sigma}^{b''c''}$  für  $\omega(\sigma)$  ein konstanter Wert, z. B. aus der Mitte der Linie  $b \rightarrow c$  eingesetzt werden. Dann läßt sich aber die Integration über  $d\omega(\sigma)$ , z. B. durch Residuenbildung, ohne weiteres ausführen und da wegen (5) und (7b)

$$\begin{aligned} \sum_{c' b' b''} \overline{D_{\sigma}^{b'c'} D_{\sigma}^{b''c''}} \frac{1}{d\omega(\sigma)} B_{b' \bar{b}} B_{b'' \bar{b}}^* &= \frac{1}{\pi} \sum_{b' b''} \gamma^{b'' b'} B_{b' \bar{b}} B_{b'' \bar{b}}^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{b''} B_{b'' \bar{b}} B_{b'' \bar{b}}^* [i\omega(\bar{b}) + \gamma(\bar{b}) - i\omega(\bar{b}) + \gamma(\bar{b})], \end{aligned}$$

so entsteht schließlich aus (11):

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{c'} d\omega(\varrho) \int W(c' \varrho \sigma) d\omega(\sigma) \\ &= \sum_{\bar{a} \bar{a} \bar{b} \bar{b}} \frac{1}{\omega(\bar{a}) - \omega(\bar{a}) - i\gamma(\bar{a}) - i\gamma(\bar{a})} \\ &\cdot \left[ \frac{1}{-\omega(\varrho) + \omega(\bar{a}) - \omega(\bar{b}) + i\gamma(\bar{b}) + i\gamma(\bar{a})} - \frac{1}{-\omega(\varrho) + \omega(\bar{a}) - \omega(\bar{b}) - i\gamma(\bar{a}) - i\gamma(\bar{b})} \right] \\ &\cdot \frac{d\omega(\varrho)}{d\omega(\varrho)} \sum_{b''} B_{b'' \bar{b}} B_{b'' \bar{b}}^* \alpha_{\bar{a} \bar{b}}^{\varrho} \alpha_{\bar{a} \bar{b}}^{\varrho*} A^{\bar{a}} A^{\bar{a}*}. \end{aligned} \right.$$

Zur Kontrolle kann man diesen Ausdruck über  $\omega(\varrho)$  integrieren. Es ergibt sich dann mit Hilfe von (4), (6), (7a), (9) der Wert Eins.

Die Glieder mit  $\bar{a} = \bar{a}$  und  $\bar{b} = \bar{b}$  in (12) lassen sich so zusammenfassen, daß Ausdrücke mit den Nennern  $[\omega(\varrho) - \omega(\bar{a}) + \omega(\bar{b})]^2 + [\gamma(\bar{a}) + \gamma(\bar{b})]^2$  entstehen; sie entsprechen der üblichen Form von dämpfungsverbreiterten Spektrallinien mit den Linienschwerpunkten an den Stellen  $\omega(\bar{a}) - \omega(\bar{b})$ . Diese  $\omega(\bar{a}) - \omega(\bar{b})$  sind von den  $\omega(a') - \omega(b')$  im allgemeinen verschieden, wenn die  $\gamma^{a' a''}$ ,  $\gamma^{b' b''}$  keine Diagonalmatrizen sind. Die übrigen Glieder in (12) lassen sich zu Ausdrücken mit denselben Nennern zusammenfassen, die aber in den Zählern lineare Funktionen von  $\omega(\varrho)$  enthalten; sie verschwinden, wenn die  $\gamma^{a' a''}$ ,  $\gamma^{b' b''}$  Diagonalmatrizen sind.

Einfacher liegen die Verhältnisse, wenn wir zwischen den drei Zuständen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  Übergänge  $a \rightarrow b$  und  $a \rightarrow c$  zulassen, aber nun  $b$  als metastabil annehmen. Der Zustand  $b$  soll etwa dem Zustand  $n = 2$ ,  $l = 0$  des Wasserstoffs entsprechen. Statt (1) lauten nun die Gleichungen der Strahlungstheorie:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{C}(a') = \sum_{b' \varrho} D_{\varrho}^{a' b'} C(b' \varrho) e^{i[\omega(a') - \omega(b') - \omega(\varrho)]t} \\ \quad + \sum_{c' \sigma} D_{\sigma}^{a' c'} C(c' \sigma) e^{i[\omega(a') - \omega(c') - \omega(\sigma)]t}, \\ \dot{C}(b' \varrho) = - \sum_{a'} D_{\varrho}^{a' b'*} C(a') e^{i[-\omega(a') + \omega(b') + \omega(\varrho)]t}, \\ \dot{C}(c' \sigma) = - \sum_{a'} D_{\sigma}^{a' c'*} C(a') e^{i[-\omega(a') + \omega(c') + \omega(\sigma)]t}. \end{array} \right.$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist jetzt eine etwas andere als in (1), insbesondere sind  $\varrho$  und  $\sigma$  die Lichtquanten, die bei den Übergängen  $a \rightarrow b$  bzw.  $a \rightarrow c$  ausgesandt werden.

Die allgemeine Lösung mit  $C(b' \varrho) = C(c' \sigma) = 0$  zur Zeit  $t = 0$  ist

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(a') = \sum_{\bar{a}} A_{\bar{a}} A_{a' \bar{a}} e^{i[\omega(a') - \omega(\bar{a}) + i\gamma(\bar{a})]t}, \\ C(b' \varrho) = \sum_{a' \bar{a}} A_{\bar{a}} A_{a' \bar{a}} D_{\varrho}^{a' b'*} i \cdot \begin{bmatrix} -\omega(b') + \omega(\bar{a}) - \omega(\varrho) - i\gamma(\bar{a}) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C(c' \sigma) = \sum_{a' \bar{a}} A_{\bar{a}} A_{a' \bar{a}} D_{\sigma}^{a' c'*} i \cdot \begin{bmatrix} -\omega(c') + \omega(\bar{a}) - \omega(\sigma) - i\gamma(\bar{a}) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

Für die  $A_{a' \bar{a}}$ ,  $\omega(\bar{a})$ ,  $\gamma(\bar{a})$  gelten die Gl. (7a); jedoch hat auch  $\gamma^{a' a''}$  jetzt eine etwas andere Bedeutung als in (6), nämlich

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{a' a''} = \frac{\pi}{4\omega(\varrho)} \sum_{b'} D_{\varrho}^{a' b'} D_{\varrho}^{a'' b'*} + \frac{\pi}{4\omega(\sigma)} \sum_{c'} D_{\sigma}^{a' c'} D_{\sigma}^{a'' c'*}. \end{array} \right.$$

3. In dem uns hier interessierenden Fall des Wasserstoffs seien die  $a, b, c$  drei aufgespaltene Niveaus mit den Hauptquantenzahlen  $n_a = 3, n_b = 2, n_c = 1$ . Für optisch sichtbares Licht ist die Phase  $\Gamma_{\varrho}$  über die Ausdehnung des Atoms praktisch konstant. Daher wird aus (6) wegen der Definition von  $D_{\varrho}^{a' b'}$ :

$$\gamma^{a' a''} = \frac{2}{3} \frac{e^3 \omega^3}{\hbar c^3} \sum_{b'} \left( X_{b'}^{a'}, X_{b'}^{a''*} \right),$$

wo  $X_{b'}^{a'}$  das Matrixelement des Radiusvektors  $\{x, y, z\}$  für den Übergang  $a' \rightarrow b'$  ist. Wegen der Auswahlregeln für die Matrixelemente von  $x \pm iy, z$  und wegen (16) gilt:

$$\gamma^{a' a''} = 0, \text{ wenn } |l_{a''} - l_{a'}| \neq 0 \text{ und } \neq 2; \text{ ferner wenn } m_{a'} \neq m_{a''}.$$

Damit zerfallen die Niveaus von  $n_a = 3$  in zwei Gruppen:

Die erste Gruppe mit den Niveaus mit  $l = 0$  und  $l = 2$  enthält die stärksten Linien und spielt also die entscheidende Rolle.

Sie kann mit dem Grundzustand  $n_c = 1$  ( $l = 0$ ) nicht direkt kombinieren, und daher sind die Ergebnisse aus den Gleichungen (1) in Strenge anwendbar.

Die zweite Gruppe mit den Niveaus mit  $l = 1$  ist dadurch ausgezeichnet, daß Doppelübergänge nach dem Grundzustand nicht möglich sind. Denn entweder wird der direkte Übergang  $a \rightarrow c$  vollzogen, oder durch den Übergang  $a \rightleftharpoons b$  wird das metastabile Niveau  $2s$  erreicht. Daher sind die Verhältnisse der Gleichungen (13) gegeben.

Bei der ersten Gruppe ist die Matrix  $\gamma^{a' a''}$  aus (6), bei der zweiten die aus (15) maßgebend.

Zur Berechnung der  $\gamma^{a' a''}$  und  $\gamma^{b' b''}$  sind zunächst die Matrixelemente von  $x \pm iy$  und  $z$  nötig. Wegen der Reellität von  $(x \pm iy)_{b'}^{a'}$  und  $z_{b'}^{a'}$  gilt:

$$(16) \quad \begin{cases} (X_{b'}^{a'}, X_{b'}^{a''}) = \frac{1}{2} (x + iy)_{b'}^{a'} (x + iy)_{b'}^{a''} \\ \quad + \frac{1}{2} (x - iy)_{b'}^{a'} (x - iy)_{b'}^{a''} + z_{b'}^{a'} z_{b'}^{a''}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der bei Bethe<sup>1)</sup> angegebenen Ausdrücke findet man, daß

$$(17) \quad \sum_{m_{b'}} (X_{b'}^{a'}, X_{b'}^{a''}) = 0, \text{ wenn } a' \neq a''. \text{ Die Summe ist bei festem } n_{b'}, l_{b'}, j_{b'} \text{ auszuführen.}$$

Dies gilt auch für beliebige Hauptquantenzahlen  $n_a, n_{b'}$ . Die  $\gamma^{a' a''}, \gamma^{b' b''}$  in (6), sowie die  $\gamma^{a' a''}$  in (15) sind also Diagonalmatrizen. Aus (7a) und (7b) folgt daher für die Gruppe 1, wenn wir  $a'$  mit  $a$ ,  $b'$  mit  $\bar{b}$  identifizieren:

$$\begin{aligned} A_{a' a''} &= \delta_{a' a''}, B_{b' b''} = \delta_{b' b''}, \text{ wo } \delta_{ik} = 1 \text{ für } i = k, \\ &= 0 \text{ für } i \neq k, \text{ und } a_{a' b'}^2 = D_{\bar{a}}^{a' b'}. \end{aligned}$$

In (12) bleiben nur die Glieder mit  $\bar{a} = \bar{a}$ ,  $\bar{b} = \bar{b}$ . Es ändern sich weder die Linienschwerpunkte noch die auf die übliche Art berechneten Intensitäten durch die Strahlungskopplung verschiedener Feinstrukturniveaus. Dasselbe gilt für die Gruppe 2.

1) H. Bethe, a. a. O. S. 432. Die Matrixelemente sind dort ohne Spin für die drei Quantenzahlen  $n, l, m$  angegeben. Für vier Quantenzahlen  $n, l, j, m$  sind sie folgendermaßen zu ändern: In den Wurzeln auf der rechten Seite von (39·7), (39·11) ist im Zähler  $j$  statt  $l$  und im Nenner  $(2j + 2)^2$  statt  $(2l + 1)(2l + 3)$  bzw.  $(2j)^2$  statt  $(2l + 1)(2l - 1)$  zu schreiben; diese Formeln gelten dann für die Übergänge  $j \rightarrow j \pm 1$ . Für die Übergänge  $j \rightarrow j$  gelten die Formeln (42·14) und (42·15), jedoch ist in der letzteren auf der rechten Seite vor der Wurzel ein Minuszeichen hinzuzufügen.

Dieses Ergebnis bleibt wegen der Allgemeinheit von (17) nicht beschränkt auf die Linien zwischen  $n = 3, 2, 1$ , sondern gilt für alle Wasserstofflinien, also insbesondere für alle Balmerlinien<sup>1)</sup>.

• Houston und Hsieh haben die Vermutung ausgesprochen, daß der Übergang  $2p \rightarrow 1s$  mit einer Übergangswahrscheinlichkeit von  $6,25 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}$  nicht nur eine Verbreiterung der Feinstrukturlinien sondern auch eine Verschiebung von gewissen Feinstrukturlinien um einen Betrag von derselben Größenordnung hervorrufen könnte, wie er durch die Diskrepanz ihrer Messungen und der Sommerfeldschen Feinstrukturformel verlangt wird. Diese Vermutung ist durch das obige Ergebnis widerlegt.

4. Der Einfluß der Strahlung anderer Atome auf die Ausstrahlung eines Atoms kann höchstens dann merkbar werden, wenn die Frequenzen annähernd gleich sind. Dieser Fall tritt z. B. in einer Entladungsröhre auf, in der sich immer viele Atome in einem bestimmten angeregten Zustand, der eventuell noch gering aufgespalten sein kann, befinden. Diese Atome können dann gleiche oder benachbarte Frequenzen aussenden. Zur genaueren Untersuchung der Wechselwirkung seien zwei Atome herausgegriffen. Auf Grund der Diracschen Strahlungstheorie lassen sich dann die Gleichungen ansetzen für die Wahrscheinlichkeit, daß nach der Ausstrahlung der angeregten Atome Lichtquanten in bestimmten Intervallen angetroffen werden. Diese Wahrscheinlichkeiten sind dann zu mitteln über alle Bewegungszustände, die durch die Wärmebewegung im Gas auftreten, unter Berücksichtigung des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes.

Nach der klassischen Elektrodynamik läßt sich das Problem für zwei Oszillatoren so behandeln, daß man auf das Ruhesystem z. B. des ersten Oszillators transformiert. Dabei wird die vom zweiten Oszillator ausgesandte Welle durch den Dopplereffekt in Wellenlänge und Dämpfungskonstante modifiziert. Wenn also die Dopplerverschiebung geeignet berücksichtigt wird, und man im übrigen statt der gegeneinander bewegten Oszillatoren relativ zueinander ruhende annimmt, so vernachläßigt man nur die Rückwirkung der ausgesandten Strahlung auf den aussendenden Oszillator. Setzt man nun die Bewegungsgleichung des ersten Oszillators im Strahlungsfeld des zweiten Oszillators an, so erhält man durch Fourierzerlegung der Lösung unmittelbar die Frequenzverteilung der vom ersten Oszillator ausgesandten Intensität.

1) Auch im homogenen Magnetfeld gilt dieses Ergebnis noch, jedoch nicht mehr im homogenen elektrischen Feld, weil dort  $l$  keine brauchbare Quantenzahl mehr ist. Vgl. dazu G. Breit u. I. S. Lowen, a. a. O.

Die Gleichungen der Diracschen Strahlungstheorie für den Fall zweier ruhender Atome 1 und 2, die benachbarte Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  aussenden können, lauten:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{C} = \sum_s D_s^2 C_{2s} e^{i(\omega_2 - \omega_s)t} + \sum_s D_s^1 C_{1s} e^{i(\omega_1 - \omega_s)t} \\ \dot{C}_{1s} = -D_s^{1*} C e^{-i(\omega_1 - \omega_s)t} + \sum_\sigma D_\sigma^2 C_{\sigma s} e^{i(\omega_2 - \omega_\sigma)t} \\ \dot{C}_{2s} = -D_s^{2*} C e^{-i(\omega_2 - \omega_s)t} + \sum_\sigma D_\sigma^1 C_{\sigma s} e^{i(\omega_1 - \omega_\sigma)t} \\ \dot{C}_{\sigma\sigma} = -D_\sigma^{1*} C_{2s} e^{-i(\omega_1 - \omega_\sigma)t} - D_s^{1*} C_{2\sigma} e^{-i(\omega_1 - \omega_\sigma)t} \\ \quad - D_\sigma^{2*} C_{1s} e^{-i(\omega_2 - \omega_\sigma)t} - D_s^{2*} C_{1\sigma} e^{-i(\omega_2 - \omega_\sigma)t}. \end{array} \right.$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplituden bedeuten:

$C$ : beide Atome angeregt.

$C_{i,s}$ : Atom  $i$  im Grundzustand, ein Lichtquant  $s$  im Hohlraum.

$C_{\sigma\sigma}$ : Beide Atome im Grundzustand, zwei Lichtquanten  $s$  und  $\sigma$  im Hohlraum.

$D_i^i$  bezieht sich auf das Atom  $i$ .

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, daß  $C_{\sigma\sigma}$  symmetrisch in  $s$  und  $\sigma$  ist, wenn es zur Zeit  $t = 0$  diese Eigenschaft hatte. Zur Zeit  $t = 0$  sollen aber alle Wahrscheinlichkeitsamplituden verschwinden außer  $C$  mit dem Wert 1, d. h.  $C_{\sigma\sigma}(0) = C_{ss}(0) = 0$ .

Die Wahrscheinlichkeitsamplituden für den Fall der Lichtemission eines einzigen Atoms sind bekannt. Es liegt nahe, die Gl. (18) durch Multiplikation der Lösungen für die einzelnen Atome näherungsweise zu lösen. Werden dann diese Näherungslösungen in die rechte Seite der Gl. (18) eingesetzt, und daraufhin nach der Zeit integriert, so ist eine bessere Lösung zu erwarten.

Die nullte Näherungslösung lautet:

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t} \\ C_{1s}^0 &= i D_s^{1*} e^{-\gamma_2 t} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 - \omega_s - i\gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_{2s}^0 &= i D_s^{2*} e^{-\gamma_1 t} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_s - i\gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_{\sigma\sigma}^0 &= -D_s^{2*} D_\sigma^1 \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_\sigma - i\gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 - \omega_\sigma - i\gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In der ersten Näherung ist

$$C_{\sigma\sigma}^1 = C_{\sigma\sigma}^0 + C_{\sigma\sigma}^0; C^1 = C^0, C_{is}^1 = C_{is}^0, i = 1, 2.$$

Setzt man diese Näherung in die rechte Seite von (13) ein, so ergibt sich durch Integration nach der Zeit die zweite Näherung.

Sie unterscheidet sich von der ersten nur in den  $C_{s\sigma}$ . Die dritte Näherung gewinnt man ebenso; sie unterscheidet sich von der zweiten Näherung nur in  $C$  und  $C_{s\sigma}$ . Auf ihren Einfluß wird unten kurz hingewiesen.

Für  $t = \infty$  gilt

$$C_{s\sigma}^1 C_{s\sigma}^{1*} = \left| \frac{D_s^{2*} D_\sigma^{1*}}{[\omega_s - \omega_2 + i\gamma_2][\omega_\sigma - \omega_1 + i\gamma_1]} + \frac{D_\sigma^{2*} D_s^{1*}}{[\omega_\sigma - \omega_2 + i\gamma_2][\omega_s - \omega_1 + i\gamma_1]} \right|^2.$$

Dieser Ausdruck wird summiert über alle Phasen, Polarisationen und Fortschreibungsrichtungen der Hohlraumschwingungen  $s$  und  $\sigma$  der Intervalle  $d\omega(s)$  und  $d\omega(\sigma)$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Lichtquant im Intervall  $d\omega(s)$  ist, ergibt sich durch Integration über  $\omega(\sigma)$ . Sei

$$\gamma_i = \overline{D_s^i D_\sigma^{i*}} \frac{\pi}{d\omega(s)}; \quad \delta = \overline{D_s^1 D_\sigma^{2*}} \frac{\pi}{d\omega(s)}.$$

Die  $\gamma_i$  und  $\delta$  ändern sich nur langsam in Gebieten von der Größenordnung der natürlichen Linienbreite. Also ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(s) d\omega(s) = \frac{d\omega(s)}{4\pi} \left[ \frac{\gamma_1}{(\omega_s - \omega_1)^2 + \gamma_1^2} + \frac{\gamma_2}{(\omega_s - \omega_2)^2 + \gamma_2^2} \right] \\ \quad \cdot \left[ 1 + \frac{4\delta\delta^*}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2} \right]. \end{array} \right.$$

Hier scheint der Satz von der Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit verletzt, denn integriert man  $W(s)$  über  $\omega(s)$ , so ergibt sich

$$1 + \frac{4\delta^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2}.$$

Das hat offenbar seinen Grund darin, daß der obige Ausdruck für  $W(s)$  den Beginn einer Entwicklung nach steigenden Potenzen von  $\delta$  darstellt, und entsprechend der verwendeten Näherung ist dieser Ausdruck exakt einschließlich der Glieder mit  $\delta$ . Die gefundenen Glieder mit  $\delta^2$  zeigen aber, von welcher Größenordnung die durch die dritte Näherung gelieferten Glieder sein werden. Tatsächlich liefert auch die Berechnung der dritten Näherung ein Korrekturglied von der Größenordnung  $\delta^2$ . Es soll jedoch nicht angegeben werden, da es bei den experimentellen Bedingungen bedeutungslos ist; es sei nur noch erwähnt, das eventuelle Linienverschiebungen von der Größenordnung  $\delta^2/\gamma_i$  sind.

Die Berechnung von  $\delta$  ist in dem Bericht von Fermi für den Fall sichtbaren Lichtes, wo die Phase  $\Gamma_s$  über die Ausdehnung des Atoms als konstant angesehen werden kann, für eine spezielle Lage der Matrixelemente  $\vec{X}_1$  bzw.  $\vec{X}_2$  des Radiusvektors für den betrachteten Übergang des Atoms 1 bzw. 2 angegeben. Allgemeiner

ist für  $\omega r_{12}/c \gg 1$  (d. h. Wellenzone der ausgestrahlten elektromagnetischen Welle) und  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ :

$$\frac{X_1^2}{\gamma_1} \delta = \frac{X_2^2}{\gamma_2} \delta = \frac{X_1^2 + X_2^2}{\gamma_1 + \gamma_2} \delta = \frac{3}{2} \frac{\sin\left(\frac{\omega r_{12}}{c}\right)}{\frac{\omega r_{12}}{c}} (X_{1y} X_{2y} + X_{1z} X_{2z}),$$

wenn  $r_{12}$ , der Abstand der beiden Atome, in die  $x$ -Achse fällt.

Also wird  $|\delta| \leq \frac{3}{4} \frac{c}{\omega r_{12}} (\gamma_1 + \gamma_2)$ .

Es ist nun zu zeigen, daß tatsächlich der mittlere Abstand zweier angeregter H-Atome in einem Zustand mit der Hauptquantenzahl  $n = 3$  groß ist gegen  $c/\omega$ . Sei wie bei Houston und Hsieh die Stromdichte  $i \approx 0,03$  Amp./cm<sup>2</sup>; Heliumdruck =  $p_{\text{He}}$ , Wasserstoffdruck =  $p_{\text{H}} < 0,1 p_{\text{He}}$ ; mittlere Lebensdauer der angeregten Zustände  $\frac{1}{\gamma} \approx 10^{-8}$  sec. Zahl der Anregungen durch ein Elektron pro Zentimeter Röhrenlänge =  $N$ . Dann gilt für den mittleren Abstand zweier angeregter Wasserstoffatome

$$r_{12} \approx \sqrt[3]{\frac{p_{\text{He}} + p_{\text{H}}}{p_{\text{H}}}} \frac{\gamma}{Ni} \frac{4,77 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^9} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \cdot N^{-1/3}.$$

Bei Röhrenfeldstärken von 20 Volt/cm und Anregungsenergien von einigen zehn Volt ist  $N$  von der Größenordnung Eins. Damit wird

$$r_{12} > 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm und } \frac{\omega r_{12}}{c} > 200.$$

Bei Spedding, Shane und Grace dürften die Verhältnisse nicht viel ungünstiger liegen.

Damit ist gezeigt, daß Linienverschiebungen durch die Strahlungswchselwirkung der Atome im Falle der angegebenen Versuchsbedingungen kleiner sind als  $10^{-4}$  der natürlichen Linienbreite; eine Mittelung über alle Geschwindigkeiten mit dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz als Gewichtsfaktor kann diese Verschiebung höchstens noch verkleinern.

5. Es ist somit gezeigt, daß die Wechselwirkung des Atoms mit dem Strahlungsfeld *keine* Änderung des Linienbildes der Linien  $H_a$  und  $D_a$  gibt, die in beobachtbare Größenordnung fällt. Die ganze Art der Rechnung zeigt aber, daß auch bei den anderen Balmerlinien eine solche Änderung nicht eintreten kann. Von den anderen oben aufgezählten theoretischen Möglichkeiten für eine Abweichung des Linienbildes der Balmerlinien von der Sommerfeldschen Feinstrukturformel gibt nur *eine* solche Werte, die mit den beobachteten Diskrepanzen in der Größenordnung und in der Richtung einigermaßen übereinstimmen; das ist die Annahme von

Born und Schrödinger<sup>1)</sup>, daß der Elektronenradius im wesentlichen durch die magnetische Energie, (statt der elektrostatischen) des Spinelektrons bestimmt wird<sup>2)</sup>. Indessen ist auch diese Möglichkeit schwerwiegenden Bedenken ausgesetzt, von denen uns das wichtigste zu sein scheint, daß der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von langwelligem Licht an Elektronen (Rayleighsche Streuung) theoretisch und experimentell annähernd gleich dem klassischen Elektronenquerschnitt  $\pi e^4/m^2 c^4$  ist<sup>3)</sup>.

Es ist daher anzunehmen, daß die von verschiedener Seite gefundenen Abweichungen von der Sommerfeldschen Feinstrukturformel aus einer Überschätzung der Meßgenauigkeit entstanden und nicht reell sind. Darauf deutet auch hin, daß die Bestätigung der Feinstrukturformel durch Spedding, Shane und Grace<sup>4)</sup>, abgesehen von einer vorläufigen Mitteilung von Williams und Gibbs<sup>5)</sup> über die Auflösung von  $D_a$ , bis heute unwidersprochen ist.

1) M. Born u. E. Schrödinger, a. a. O.

2) Vgl. J. Meixner, a. a. O.

3) M. Born, *Naturw.* **20**, S. 269. 1932; vgl. auch *Nature* **136**, S. 952. 1935.

4) F. H. Spedding, C. D. Shane u. N. S. Grace, a. a. O.

5) R. C. Williams u. R. C. Gibbs, *Phys. Rev.* **48**, S. 971. 1935.

Gießen, Institut für theoretische Physik, 11. September 1936.

(Eingegangen 12. September 1936)

**Der Nutzeffekt der Röntgen-K-Fluoreszenzstrahlung  
bei den Elementen C, N, O, Ne<sup>1)</sup>**

**Von Willi Crone**

(Mit 3 Figuren)

**I. Problemstellung**

Man definiert den Nutzeffekt quantenmäßig als das Verhältnis der Anzahl Quanten der Fluoreszenzstrahlung  $N_F$  zu der Zahl der absorbierten Primärquanten  $N_P$ :

$$u = \frac{N_F}{N_P}$$

oder energetisch als:

$$\eta = \frac{I_F}{I_P} = \frac{N_F \cdot h \cdot \nu_F}{N_P \cdot h \cdot \nu_P},$$

wenn man mit  $I_F$  die gesamte, in den vollen Raumwinkel ausgestrahlte Intensität der Fluoreszenzstrahlung, mit  $I_P$  die absorbierte Primärenergie bezeichnet. Es wird damit:

$$u = \eta \cdot \frac{\lambda_F}{\lambda_P}.$$

Bezieht man den Nutzeffekt nur auf die im K-Niveau absorbierten Quanten, so erhält man den Nutzeffekt der K-Fluoreszenzstrahlung

$$u_K = \eta \cdot \frac{\delta_K}{\delta_K - 1} \cdot \frac{\lambda_F}{\lambda_P}.$$

$\delta_K$  ist der K-Absorptionsprung für das betreffende Element. Man kann also  $u_K$  experimentell auf zwei verschiedenen Wegen bestimmen, entweder ionometrisch durch Messung von  $I_P$  und  $I_F$ , oder quantenmäßig durch direkte Zählung von  $N_F$  und  $N_P$ .

Verschiedene in früheren Jahren ausgeführte Messungen zeigen eine Abhängigkeit des Nutzeffektes von der Ordnungszahl. Diese Messungen erstreckten sich fast ausschließlich auf das Gebiet mittlerer Ordnungszahlen. In einer neueren Arbeit von Haas<sup>2)</sup> wurde

1) Dissertation der Technischen Hochschule München, eingereicht am 25. Januar 1935.

2) M. Haas, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 473. 1933 (mit Angabe früherer Arbeiten).

der Nutzeffekt für leichte Elemente bestimmt. Es zeigte sich dabei eine starke Abnahme des Nutzeffektes mit kleiner werdender Ordnungszahl, in guter Übereinstimmung mit der Theorie von Wentzel<sup>1)</sup>, wonach bei kleinen Ordnungszahlen  $z$  der Nutzeffekt proportional  $z^4$  ansteigt. Nach der Wentzelschen Theorie ist die Wahrscheinlichkeit der Emission proportional  $z^4$ , die der inneren Absorption konstant =  $a$ . Da für die Wahrscheinlichkeit der inneren Absorption die Besetzung der  $L$ -Schale maßgebend ist, erscheint es wünschenswert, in dem Gebiet der unvollständig besetzten  $L$ -Schale einige Meßpunkte zu erhalten.

## II. **Meßverfahren**

### 1. Prinzip des Verfahrens

Nach der Theorie von Wentzel und auf Grund der bisherigen Messungen hat man damit zu rechnen, daß für die Elemente, deren Ordnungszahlen unterhalb 10 liegen, der Nutzeffekt  $u_K < 1\%$  wird. Über die Größenordnung der bei einer Messung in diesem Gebiet zu erwartenden Energien gibt folgende Überschlagsrechnung Aufschluß: Von der einfallenden Primärstrahlung mögen 10% absorbiert werden. Die in den ganzen Raumwinkel strahlende Fluoreszenzstrahlung möge ebenfalls zu 10% erfaßt werden. Das ergibt bei einem Nutzeffekt von 1%, daß auf  $10^5$  einfallende Primärquanten 1 Fluoreszenzquant gemessen wird. Die bei den Messungen verwendete Röntgenröhre lieferte, bei hoher Belastung einfallend, etwa  $10^6$  Quanten/sec monochromatischer Strahlung, entsprechend einem Ionisationsstrom von etwa  $10^{-12}$  Amp. Bei ionometrischer Messung der Fluoreszenzstrahlung müßten also Ströme von der Größenordnung von  $10^{-17}$  Amp. gemessen werden. Da auf streng homogene, also kristallzerlegte Primärstrahlung nicht verzichtet werden kann, ist eine Steigerung der Primärintensität nicht möglich. Es bleibt also nur der zweite Weg, eine empfindlichere Messung der Fluoreszenzstrahlung anzuwenden, d. h. eine Zählmethode. Bei den vorliegenden Messungen wurde ein Spitzenzähler verwendet.

Die in dem zu untersuchenden Gebiet zur Verfügung stehenden Elemente sind fast durchwegs gasförmig. Es ergibt sich daraus eine Versuchsanordnung, deren Schema Fig. 1 zeigt. Ein vom Kristall kommendes homogenes Röntgenstrahlbündel tritt durch den Spalt  $S$  in ein mit dem Meßgas gefülltes Gefäß ein. Die längs des Strahles entstehende Sekundärstrahlung tritt durch eine Öffnung in den seitlich, senkrecht zum Primärstrahl angeordneten Spitzen-

1) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 43, S. 524. 1927.

zähler ein und bringt diesen zum Ansprechen. Die Intensität der Primärstrahlung wird mittels einer Ionisationskammer gemessen. Es sind bei der skizzierten Versuchsanordnung verschiedene Sekundäreffekte und Korrekturen zu berücksichtigen:

1. Längs des Strahles entstehen Photoelektronen. Der Abstand des Zählers vom Primärstrahl muß größer als die Reichweite der Photoelektronen sein.

2. Außer der Fluoreszenzstrahlung nimmt der Spitzenzähler die Streustrahlung auf. Ihr Anteil ist bei den kleinen Nutzeffekten erheblich und muß abgezogen werden.

3. Die Fluoreszenzstrahlung wird auf dem Wege zum Zähler im Füllgas, sowie in der Abschlußfolie der Zähleröffnung absorbiert. Die Absorptionskoeffizienten sind in dem Gebiete der langen Wellenlängen noch nicht gemessen worden.

Über die Bestimmung der Korrektionsgrößen wird unter III/1 eingehend berichtet.

Zur Bestimmung des Nutzeffektes ist es notwendig, den vom Spitzenzähler erfaßten Raumwinkel, und den zur Wirkung kommenden Teil der Primärstrahlung zu kennen. Da deren Bestimmung unsicher ist, wird darauf verzichtet, den Absolutwert des Nutzeffektes zu bestimmen. Es wurden vielmehr unter Konstanzhaltung der geometrischen Anordnung die Relativwerte, also der Gang von  $u_K$ , in Abhängigkeit von der Ordnungszahl  $z$  bestimmt.

Die Messungen wurden ausgeführt an den Elementen Ne, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, sowie am Propan C<sub>3</sub>H<sub>8</sub>. Zur Anregung der Fluoreszenzstrahlung diente in allen Fällen die K<sub>α</sub>-Linie von Aluminium.

## 2. Ausführung der Meßapparatur

### a) Primärstrahlung

Zur Erzeugung der Primärstrahlung dient ein Vakuumspektrometer, welches in der schon erwähnten Arbeit von Haas näher

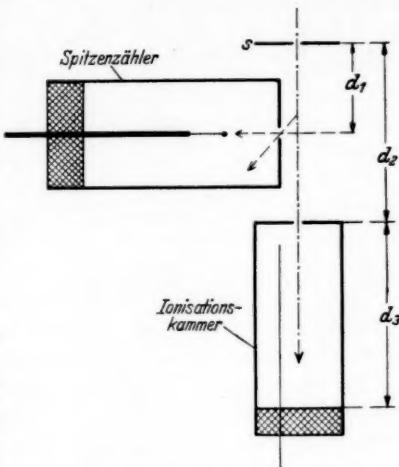


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung

beschrieben ist. Die Metallröntgenröhre ist in den drehbaren Deckel des Spektrographen eingebaut. Fig. 2 zeigt einen Horizontalschnitt durch die Meßapparatur.

Die Röhre wurde mit einer Wechselspannung von 10 kV betrieben. Die Glühkathode ist geerdet, die Hochspannung liegt an

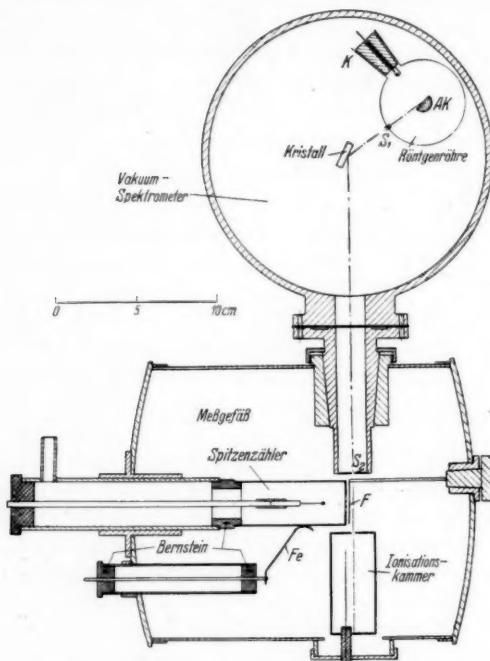


Fig. 2. Vakumspektrometer und Meßgefäß

der Antikathode. Auf die wassergekühlte Antikathode ist ein 2 mm starkes Aluminiumblech aufgelötet. Das von dem Brennfleck ausgehende Röntgenstrahlbündel wird von dem Spalt  $S_1$  der Röntgenröhre ausgeblendet und fällt auf den durch einen Schliff drehbaren Gipskristall, der in geeigneter Reflexionsstellung die  $K_{\alpha}$ -Linie aussendet. Die Röhre, sowie der Vakuumtopf des Spektrographen liegen je an einer Diffusionspumpe.

Über einen Metallschliff schließt sich an das Spektrometer direkt das eigentliche Meßgefäß an. Es besteht aus einem großen Messingzylinder, welcher die Ionisationskammer und den Spitzenzähler enthält. Der vom Kristall kommende Strahl tritt durch den

Spalt  $S_2$  in das Meßgefäß ein. Der Spalt ist mit einer Aluminiumfolie von  $7,5 \mu$  Dicke gegen den Vakuumtopf abgeschlossen. Das Bündel hat einen Querschnitt von  $10 \times 0,5$  mm.

Die Justierung des Primärstrahles erfolgte ionometrisch. Vor dem Spalt der Ionisationskammer konnte ein Film befestigt werden, um die Linie auch photographisch kontrollieren zu können. Die Justierung mußte aus Gründen der Intensität sehr genau vorgenommen werden.

b) *Ionisationskammer*

Die Ionisationskammer ist ein Messingzylinder von 61 mm nutzbarer Länge. Die Meßelektrode, ein Cu-Draht von 0,6 mm Durchmesser, ist 5 mm exzentrisch angebracht, um den Strahlengang nicht zu beeinflussen. Die Wandung der Ionisationskammer ist auf die konstante Spannung von 100 Volt aufgeladen. Die Meßelektrode ist bernsteinisoliert durchgeführt. Zur Vermeidung von Kriechströmen von der auf Spannung befindlichen Kammerwand zu der Meßelektrode ist diese mit einem geerdeten Zwischenring versehen.

Die Meßelektrode ist durch eine bernsteinisierte, elektrostatisch abgeschirmte Leitung mit einem Fadenelektrometer verbunden, dessen Empfindlichkeit etwa 200 Skt./Volt betrug. Die Messung erfolgte durch Kompensation, wodurch man von unvermeidlichen Empfindlichkeitsschwankungen unabhängig war. Die Kompensation der Fadenaufladung erfolgte über einen hochwertigen, bernsteinisolierten Becherkondensator (Harmsscher Kondensator, Kapazität 40 cm). Die Ablesung der Kompensationsspannung erfolgte an einem hochempfindlichen Zeigerinstrument. Sämtliche Schaltvorgänge, Erdung, Zuschaltung des Kondensators usw., geschahen mittels abgeschirmter, bernsteinisolierter Schalter.

c) *Spitzenzähler*

Der Spitzenzähler steht senkrecht zum Primärstrahl und befindet sich in der Achse des Meßgefäßes. Aus Intensitätsgründen mußte er möglichst nahe an den Primärstrahl herangebracht werden. Er ist deshalb über einen Bernsteinisolator an ein Messingrohr angesetzt, das in einem Führungsrohr in axialer Richtung beweglich ist, und mittels Stellschrauben eingestellt und fixiert werden kann. Ebenso kann der Spitzenzähler durch dieses Rohr leicht ganz herausgezogen werden. In dem anderen Abschlußdeckel ist etwas exzentrisch ein Schliff angebracht, durch dessen Drehung eine Folie  $F$  vor die Öffnung des Spitzenzählers gebracht werden kann.

Das Gehäuse des Spitzenzählers ist ein Messingrohr von 30 mm Weite und 67 mm Länge. Die Stirnwand ist mit einer 1 mm

starken Messingscheibe abgeschlossen. Zur Erhöhung der Absorption wurde der Spitzenzähler mit Argon gefüllt. Er mußte deshalb gegen das Meßgefäß vakuumdicht abgeschlossen werden. Für die Abschlußfolie kam nur ein Material in Frage, dessen Absorptionskoeffizient im Gebiet zwischen 10 und 44 ÅE genügend klein war. Es wurde Celluloid verwendet, das sich in Form von dünnen Häutchen leicht herstellen ließ. Die aus der Farbe der Interferenzstreifen festgestellte Dicke betrug bei der zur Messung verwendeten Folie  $0,3 \mu$ . Da die Folie bei großer Zähleröffnung durch den Druckunterschied zwischen Meßgefäß und Zähler einer zu starken Beanspruchung ausgesetzt war und öfters zerriß, wurde die Öffnung ersetzt durch 61 Bohrungen von je 1 mm Durchmesser, welche innerhalb eines Kreises von 10 mm Durchmesser lagen. Als Spitzen wurden in üblicher Weise kleine Platinkügelchen verwendet. Der Abstand von der Spitze zur Zähleröffnung betrug 15 mm. (Der Zähler arbeitete mit positiver Spitze.) Die Spitze lag an Spannung, das Gehäuse war über eine Kontaktfeder (Fe) und eine abgeschirmte, hochisiolerte Leitung mit Elektrometer, bzw. einem Verstärker verbunden. Die erforderliche Betriebsspannung betrug ungefähr 1000 Volt. Die Spitzentladungen konnten wahlweise einem Fadenelektrometer oder über einen Verstärker einem Addierwerk zugeführt werden. Mit dem Zählwerk konnten maximal 10 Teilchen pro Sekunde gezählt werden, was für die bei den Messungen vorkommenden Zählgeschwindigkeiten völlig genügte. Hochspannungsquelle, Verstärker, sowie die gesamte elektrische Anlage, waren in geerdeten Blechgehäusen elektrostatisch abgeschirmt.

Der Zähler wurde bei den ersten Versuchen mit negativer Spitze verwendet. Es zeigte sich jedoch, daß eine Umpolung eine Empfindlichkeitssteigerung um den Faktor 10 brachte. Gleichzeitig nahm die Zahl der spontanen Ausschläge um denselben Betrag zu, was mit Rücksicht auf die nicht zu entbehrende Empfindlichkeitssteigerung in Kauf genommen werden mußte. Ihre Anzahl bewegte sich je nach den Betriebsbedingungen zwischen 10 und 20 pro Minute und war bei allen Spitzen ungefähr gleich groß. Vor und nach jeder Messung wurde ihre Anzahl bestimmt und in Abzug gebracht.

Als Füllgas des Spitzenzählers wurde reines Argon verwendet. Es war ursprünglich vorgesehen, den Druck im Zähler möglichst hoch zu wählen und ihn bei allen Messungen konstant zu halten, wodurch die Betriebsbedingungen des Zählers immer die gleichen gewesen wären. Leider hielt die dünne Zelluloidfolie dem Druckunterschied zwischen Zähler und Meßgefäß über die Dauer einer ganzen Meßreihe, mit wiederholtem Evakuieren und Füllen des Meß-

gefäßes, nicht stand. Aus diesem Grunde wurde der Druck im Zähler jeweils dem Druck im Meßgefäß angeglichen.

Hinsichtlich des Arbeitens des Zählers müssen nun zwei Annahmen gemacht werden:

1. Der Zähler muß bei verschiedenen Drucken die gleiche Ansprechwahrscheinlichkeit für die Fluoreszenzstrahlung besitzen. Damit dies erfüllt ist, muß die Strahlung stets vollständig im empfindlichen Bereich absorbiert werden, was bei den benutzten Wellenlängen und Drucken der Fall war. Weiter war die Betriebsspannung dem jeweiligen Druck anzupassen, so daß stets im spannungs-unabhängigen Bereich gearbeitet wurde. Ein solcher Bereich von etwa 80 Volt war für alle vorkommenden Drucke vorhanden. Daß unter diesen Bedingungen die Ansprechwahrscheinlichkeit vom Druck unabhängig ist, ließ sich zwar nicht direkt prüfen, jedoch zeigen die Ergebnisse der bei verschiedenen Drucken ausgeführten Messungen (vgl. unten Tab. 5), daß die Annahme mit größter Wahrscheinlichkeit erfüllt war.

2. Die Fluoreszenzstrahlung der 4 Elemente Ne, N, O, C hat verschiedene Wellenlängen (14 bis 44 ÅE) und es muß verlangt werden, daß der Spitzenzähler bei gleicher eintretender Anzahl Quanten der verschiedenen Wellenlängen auch die gleiche Anzahl Ausschläge gibt. Er wird zum Ansprechen gebracht durch die im Füllgas ausgelösten Photoelektronen, deren Geschwindigkeiten, entsprechend den Wellenlängen, zwischen 800 und 300 Volt liegen. Diese bilden vor der Spitze direkt unterschiedliche Ionenmengen, und es ist die Frage, ob die Verstärkung durch Stoßionisation trotzdem mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zu einer Entladung führt. Aus Untersuchungen an homogenen  $\beta$ -Strahlen zieht Riehl<sup>1)</sup> den Schluß, daß ein Zähler mit Sicherheit anspricht, wenn mindestens 10 Ionenpaare/cm erzeugt werden. Diese Bedingung ist bei den vorliegenden Messungen erfüllt, so daß auch diese zweite Annahme gerechtfertigt sein dürfte. Es sei aber hervorgehoben, daß eine Nachprüfung im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war und daß also hierin noch eine Fehlerquelle liegen kann.

#### d) Gase

Meßgefäße und Spitzenzähler waren nach außen sowie gegeneinander vakuumdicht. Jedes Gefäß war über Glasrohre und Schlitte mit Vor- und Hochvakuum bzw. mit der Vorrichtung zum Einfüllen der Gase verbunden. Die Druckmessung erfolgte mittels zweier Quecksilbermanometer, welche mit Hilfe eines Kathetometers

1) N. Riehl, Ztschr. f. Phys. 46. S. 478. 1926.

abgelesen werden konnten. Die Gase wurden von der „Gesellschaft für Lindes Eismaschinen A.G.“ in Stahlbomben geliefert. Die Bomben waren über Nadelventile direkt an die Glasapparatur angeschlossen. Vor der Einfüllung wurden Meßgefäß und Spitzenzähler sowie die Glasrohre bis zu den Ventilen evakuiert. Die Gasfüllung geschah mit Rücksicht auf die Festigkeit der Folie in beide Gefäße gleichzeitig. Durch Beobachtung der Manometer und Regulierung der Nadelventile war es möglich, die beim Einfüllen auftretenden Druckunterschiede genügend fein auszugleichen.

### III. Ausführung der Messungen

#### 1. Bestimmung der Korrektionsgrößen

##### a) Streustrahlung

Der Anteil der Streustrahlung wurde auf folgende Weise bestimmt: Vor die Zähleröffnung kann durch Drehen eines Schliffes eine Aluminiumfolie gebracht werden, deren Dicke so bemessen war, daß die Fluoreszenzstrahlung vollständig absorbiert wurde und nur ein Teil der Streustrahlung in den Zähler eintrat. Die verwendete Aluminiumfolie hatte eine Dicke von  $7,5 \mu$  und absorbiert  $50\%$  der Streustrahlung, wenn sie von einem parallelen Strahlenbündel getroffen wird. Tatsächlich geht aber die Strahlung von dem gesamten ausgedehnten Primärstrahlenbündel aus, welches von den Zähleröffnungen aus unter einem (halben) Öffnungswinkel von etwa  $45^\circ$  erscheint. Die Schwächung durch die Folie ist dementsprechend stärker. Da der Öffnungswinkel nicht genau angebbar ist, wurde die Schwächung experimentell durch Zuschaltung einer zweiten Aluminiumfolie gleicher Dicke bestimmt. Es ergab sich, daß sie  $42,3\%$  hindurchläßt, d. h. sie wirkt gegenüber dem divergenten Strahlenbündel mit einer um den Faktor 1,23 größeren mittleren Dicke.

Dieser Faktor wurde auch bei der im folgenden Abschnitt besprochenen Berechnung der Absorption im Füllgas zugrunde gelegt und die Absorption nach einem einfachen Exponentialgesetz für die so vergrößerte mittlere Dicke berechnet. Eine exakte Berechnung mittels des Exponentialintegrals zeigt, daß die Abweichungen klein sind gegenüber den sonstigen Meßfehlern, so daß diese vereinfachte Berechnungsart vollkommen ausreichte.

##### b) Absorption im Füllgas

Auf dem Wege vom Entstehungsort zur Zähleröffnung wird die Fluoreszenzstrahlung vom Füllgas absorbiert. Die Absorptionskoeffizienten für die Eigenstrahlung der Elemente Ne, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, entsprechend dem Wellenlängenband von 10 ÅE bis 40 ÅE sind noch

nicht gemessen worden. Sie wurden deshalb in folgender Weise ermittelt: Woernle<sup>1)</sup> hat die Abhängigkeit des Massenabsorptionskoeffizienten von der Wellenlänge in dem Bereich von 1—10 ÅE bestimmt. Er fand  $\tau/\rho$  proportional  $\lambda^3$ . Für C  $K_{\alpha}$ -Strahlung ( $\lambda = 44,1$  ÅE) sind die Absorptionskoeffizienten von Rentschler bestimmt worden<sup>2)</sup>; sie sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1  
Absorptionskoeffizienten für  $C_{K_{\alpha}}$  ( $\lambda = 44,1$  ÅE), nach Rentschler

Gas	Ne	$O_2$	$N_2$	$C_3H_8$
$\tau/\rho$	13100	5660	3790	2360

Unter Annahme der Gültigkeit des  $\lambda^3$ -Gesetzes wurden die Werte von Woernle bis zur Wellenlänge  $\lambda = 44,1$  ÅE extrapoliert. Die Differenz dieser so gefundenen Werte gegen die gemessenen (Tab. 1) gibt die unbekannten  $K$ -Absorptionssprünge  $\delta_K$ . Die graphische Auftragung der Absorptionskoeffizienten ergibt folgende Werte, die der Korrektionsrechnung zugrunde liegen (Tab. 2).

Tabelle 2  
Absorptionskoeffizienten für die Fluoreszenzstrahlung

Gas	Ne	$O_2$	$N_2$	$C_3H_8$
$\lambda$ (ÅE)	14,55	23,73	32,5	44,1
$\tau/\rho$	9550	1225	1850	2360

Die Abstände vom Primärstrahl zur Zähleröffnung sind bei Meßreihe I 6 mm, bei Meßreihe II 2,0 mm. Die tatsächlich wirksame Schichtdicke beträgt gemäß dem oben Gesagten das 1,23fache, d.h. 7,4 bzw. 2,5 mm. Bei dem größeren Abstand (Reihe I) sind die Korrekturen ziemlich beträchtlich. So absorbierte Neon 12—19%, Propan jedoch 49—83%.

### c) Absorption in der Zelluloidfolie

Schließlich ist noch eine Korrektur anzubringen für die Absorption in der Zelluloidfolie. Für die Fluoreszenzstrahlung von Ne,  $O_2$  und  $N_2$  wurde die Absorption in der Zelluloidfolie experimentell bestimmt, ebenfalls nach dem oben erwähnten Verfahren durch Vorschalten einer Zelluloidfolie gleicher Dicke. Bei C bereitete dies Schwierigkeiten wegen zu kleiner Intensität der Fluoreszenzstrahlung; deshalb wurde hier die Absorption gerechnet unter Zugrundelegung des Wertes<sup>3)</sup>  $\tau = 5000$ . Die wirkende Schichtdicke der Folie betrug 0,37  $\mu$ .

1) B. Woernle, a. a. O.

2) W. Rentschler, Dissertation der Universität Tübingen (1934).

3) H. Kurtz, Ann. d. Phys. [4] 85. S. 529. 1928.

## 2. Die Hauptmessungen

Nach vorhergehendem Evakuieren wurden beide Gefäße mit den Gasen gefüllt und auf den gewünschten Druck eingestellt. Der Druck war so gewählt, daß der vor der Öffnung des Spitzenzählers absorbierte Bruchteil der Primärstrahlung ein Maximum war. Um für jedes Gas verschiedene Meßpunkte zu erhalten, wurde außerdem noch bei einem höheren und einem niederen Druck gemessen. Dann wurde die für den Betrieb günstigste Spannung am Spitzenzähler aufgesucht. Vor und nach jeder Messung registrierte das Zählwerk über längere Zeiten die Leerlaufausschläge des Spitzenzählers. Die Spannung an der Röntgenröhre war über alle Messungen konstant. Der Emissionsstrom war so gewählt, daß das Zählrelais innerhalb der zulässigen Geschwindigkeit arbeitete. Sobald die Röhre nach dem Einschalten stabil arbeitete, begann die Messung durch Öffnen des Erdungsschalters. Wenn der wandernde Elektrometerfaden einen bestimmten Skalenteil erreicht hatte, wurde die Stoppuhr in Gang gesetzt und das Zählwerk abgelesen. Der Ionisationsstrom wurde dann dauernd auf Null kompensiert. Nachdem eine bestimmte Kompensationsspannung erreicht war, endete die Messung mit dem erneuten Durchgang des Fadens durch die Marke. Gleichzeitig erfolgte Ablesung von Uhr und Zählwerk. Diese Messung wurde abwechselnd mit und ohne Aluminiumfolie vorgenommen. Die Einzelergebnisse wurden gemittelt. Nach der Messung wurde wieder Leerlauf und Druck in den Gefäßen festgestellt. Einzelne Messungen wurden zur Kontrolle mit zeitlichen Abständen wiederholt.

## IV. Ergebnisse

### 1. Meßwerte

Um einen Überblick über die bei den Messungen vorkommenden Zahlen und Zeiten zu geben, sei aus dem Versuchsprotokoll ein Beispiel angeführt:

Versuch Nr. 14 Gas:  $N_2$  Druck: 408 mm

$t$  ist die Zeit in Minuten, innerhalb welcher die Kompensationsspannung  $V_K$  erreicht wurde,  $n$  ist die Anzahl gezählter Entladungen,  $n' = n - n_1$  die Anzahl der Entladungen abzüglich der Leerlaufausschläge.

	$t$ (min)	$V_K$ (Volt)	$n$	$n_1$	$n'$
Leerlauf . . . . .	31,00		582		
ohne Al-Folie . . . . .	30,13	5,0	2626	565	2061
mit Al-Folie . . . . .	28,22	5,0	1241	530	711

Wie man sieht, nahm eine einzelne Messung ziemlich lange Zeit in Anspruch. Es war notwendig darauf zu achten, daß während

dessen die Versuchsbedingungen konstant blieben. Emission und Spannung wurden dauernd beobachtet, das einwandfreie Arbeiten des Zählwerkes konnte durch Abhören der Spitzenentladungen mittels eines Kopfhörers kontrolliert werden.

## 2. Auswertung der Messungen

### a) Umrechnung auf gleiche Intensität

Durchläuft der Strahl vom Spalt bis zum Spitzenzähler die Strecke  $d_1$  (Fig. 1) in einem Gas mit dem Absorptionskoeffizienten  $\tau$ , so wird auf einer Strecke  $\Delta x$  vor dem Zähler eine Energie absorbiert vom Betrage:

$$\Delta I_{Sp} = I_0 e^{-\tau \cdot \frac{p}{p_0} \cdot d_1} \tau \cdot \frac{p}{p_0} \Delta x .$$

Die Absorption wird auf dieser Strecke ein Maximum für den Druck

$$p_{opt.} = \frac{p_0}{\tau \cdot d_1} .$$

Die Absorptionskoeffizienten  $\tau/\rho$  für Al  $K_\alpha$  ( $\lambda = 8,323 \text{ \AA}$ ) der einzelnen Gase wurden der Arbeit von Woernle<sup>1)</sup> entnommen. Der Wert für das Molekül  $C_3H_8$  kann aus  $(\tau/\rho)_C$  umgerechnet werden nach der Beziehung:

$$\left(\frac{\tau}{\rho}\right)_{C_3H_8} = \frac{M_C \left(\frac{\tau}{\rho}\right)_C + M_H \left(\frac{\tau}{\rho}\right)_H}{M_{C_3H_8}} .$$

Aus der im Laboratorium von Linde durchgeführten Molekulargewichtsbestimmung ( $M = 43,14$ ) berechnet sich die Dichte von Propan zu:

$$\rho_{C_3H_8} = 0,00195.$$

Die nachstehende Tab. 3 gibt die Absorptionskoeffizienten der Gase und die daraus berechneten Drucke in Millimeter, bei denen die Absorption vor der Spitze ihr Maximum erreicht:

Tabelle 3  
Absorptionskoeffizienten und optimale Drucke für Al  $K_\alpha$

Gas	Ne	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	C	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>
$\tau/\rho$	2750	1585	1109	713	594
$p_{opt.}$	192	210	342	—	410

Die Ionisationskammer nimmt die Intensität  $I_k$  auf

$$I_k = I_0 e^{-\tau \cdot \frac{p}{p_0} \cdot d_2} \left(1 - e^{-\tau \cdot \frac{p}{p_0} \cdot d_2}\right)$$

für  $p_{opt.}$  wird

$$I_k = I_0 \cdot e^{-\frac{d_2}{d_1}} \left(1 - e^{-\frac{d_2}{d_1}}\right)$$

1) B. Woernle, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 475. 1930.

und

$$\Delta I = I_0 \cdot \frac{\Delta x}{e \cdot d_1}$$

das bedeutet, daß

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \text{const}$$

wird, oder daß bei Einstellen dieses Druckes und konstantem  $I_0$  die Absorption  $\Delta I$  vor der Spitze bei allen Gasen denselben Wert annimmt. Diejenigen Meßwerte, welche bei anderen Drucken gewonnen wurden, waren dann auf  $p_{\text{opt}}$  umzurechnen.

b) *Umrechnung auf gleiches  $\epsilon$* 

Die Intensität  $I_k$  wird gemessen durch den Ionisationsstrom  $i = e n_i$ , wenn  $n_i$  die Anzahl der pro Sekunde gebildeten Ionenpaare ist. Bezeichnet man mit  $\epsilon$  den zur Bildung eines Ionenpaars erforderlichen Energiebetrag, so ist  $I_k = \epsilon \cdot n_i$ . Es muß also  $\epsilon$  für die verschiedenen Füllgase bekannt sein. Nach den Messungen von W. Gerbes<sup>1)</sup> sind die verschiedenen Werte für  $\epsilon$  bezogen auf Luft ( $\epsilon = 1,00$ )

Ne	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>
0,87	0,91	1,04	0,7

danach sind, bezogen auf Ne, die Meßwerte von O<sub>2</sub> und N<sub>2</sub> um den Faktor 1,05 bzw. 1,20 zu verkleinern, die Werte für C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> um den Faktor 1,24 zu vergrößern.

Tabelle 4

Meßwerte bezogen auf gleiche Absorption und gleiches  $\epsilon$ .

Meßreihe I: Abstand Zähler-Strahl 6 mm

Meßreihe II: Abstand Zähler-Strahl 2 mm

Gas	p (mm Hg)	Relative Intensität der Fluoreszenzstrahlung			
		Meßreihe I		Meßreihe II	
		ohne Al	mit Al	ohne Al	mit Al
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	400	2980	1240	4090	1650
	317	3082	1150	—	—
	150	2784	1002	3440	1210
N <sub>2</sub>	410	1309	451	—	—
	330	1512	500	1993	698
	250	1560	479	—	—
O <sub>2</sub>	250	1865	339	—	—
	204	2073	310	2524	438
	150	2319	332	—	—
Ne	250	6490	258	—	—
	189	7295	263	8475	388
	150	7560	257	—	—

1) W. Gerbes, Dissertation Technische Hochschule München; erscheint demnächst.

Nach durchgeföhrter Umrechnung nimmt die relative Intensität der Fluoreszenzstrahlung die in Tab. 4 aufgeföhrten Werte an. Die Werte der ersten Reihe, ohne Folie gemessen, setzen sich aus Fluoreszenz- und Streustrahlung zusammen, diejenigen der zweiten, bzw. vierten Reihe stellen die noch durchgehende Streustrahlung allein dar. Man sieht, daß deren Anteil von Neon gegen Propan stark zunimmt. Berücksichtigt man endlich alle unter III/1 besprochenen Korrekturen, so erhält man nach Verkleinerung um einen Faktor 100 nachstehende Werte (Tab. 5).

Tabelle 5  
Meßwerte korrigiert hinsichtlich Streustrahlung und Absorption.  
Meßreihe I: Abstand Zähler-Strahl 6 mm  
Meßreihe II: Abstand Zähler-Strahl 2 mm

Gas	Druck (mm Hg)	Relative Intensität der Fluoreszenzstrahlung		Gas	Druck (mm Hg)	Relative Intensität der Fluoreszenzstrahlung	
		I	II			I	II
$C_3H_8$	400	4 ± 5	4 ± 4	$O_2$	250	25 ± 1	
	317	18 ± 6			204	29 ± 1	25 ± 2
	150	10 ± 4	9 ± 2		150	30 ± 1	
$N_2$	410	19 ± 4		Ne	250	97 ± 1	
	330	22 ± 3	14 ± 4		189	104 ± 1	106 ± 2
	250	23 ± 4			150	105 ± 2	

### 3. Genauigkeit

Den in der Tab. 5 angegebenen Werten sind die Fehlergrenzen beigefügt. Diese wurden berechnet unter Zugrundelegung des wahrscheinlichen statistischen Fehlers  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n$  ist die für jeden Wert gezählte Anzahl Quanten.

Für das schon oben angeführte Beispiel einer Messung an  $N_2$  ist der Gang der Rechnung:

	ohne Folie	mit Folie	Leerlauf
Gezählte Anzahl . . . . .	2626 ± 34	1241 ± 23	582 ± 16
Abzug für Leerlauf . . . . .	- 565 ± 15	- 530 ± 15	
	2061 ± 37	711 ± 27	
Umrechnung auf gleiche Absorption	1570 ± 28	1275 ± 48	
Abzug der Streustrahlung . . . . .	- 1275 ± 48		
	295 ± 56		

Man sieht, daß die verschiedenen Differenzbildungen die Genauigkeit des Ergebnisses stark drücken und daß eine Steigerung der Genauigkeit nur möglich ist, wenn alle Einzelwerte mit entsprechend kleinen Fehlern behaftet sind. Wollte man die Genauigkeit um einen Faktor 10 verbessern, so müßten für jede Teilmessung 100 mal mehr Ausschläge registriert werden, was allein bei der Feststellung der

Leerlaufausschläge zu unerträglich langen Versuchszeiten führen würde. Außerdem übersteigen die durch die Unsicherheit der Korrekturen auftretenden Fehler diejenigen der statistischen Fehler, so daß eine weitere Steigerung der Versuchsdauer keinen Sinn hat. Für das Gesamtresultat läßt sich der Gesamtfehler nur aus der Streuung der Einzelwerte angeben.

#### 4. Ergebnis

Bildet man aus den für jedes Gas gewonnenen Einzelwerten das Mittel unter Berücksichtigung des durch die Genauigkeit bedingten Gewichtes der Einzelmessungen, wobei der höchste Wert (Ne) gleich 100 gesetzt ist, so erhält man schließlich:

Tabelle 6  
Mittelwerte nach Tab. 5, bezogen auf Ne = 100

Ne	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>
100 ± 3	28 ± 2	19 ± 4	11 ± 5

Diese Zahlen geben in Relativwerten bezogen auf Neon (=100) den quantenmäßig ausgedrückten Nutzeffekt an. Betrachtet man nur die Anregung in der *K*-Schale, so ist mit  $\frac{\delta_K}{\delta_K - 1}$  zu multiplizieren. Die Absorptionssprünge  $\delta_K$  sind für diese Gase so groß, daß  $\frac{\delta_K}{\delta_K - 1} = 1$  gesetzt werden kann. Die für das Molekül C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> erhaltene Ausbeute ist zur Errechnung des Wertes für *C* mit einem Faktor  $\frac{\tau_A}{\tau_M}$  zu korrigieren, wobei  $\tau_A$  der Absorptionskoeffizient des Atoms,  $\tau_M$  der des Moleküls ist. Der Faktor beträgt 0,985 also nahezu 1.

Um Anschluß an die früheren Meßwerte zu erhalten, wurde der hinsichtlich Meßgenauigkeit und Fehlerkorrektion am besten gesicherte Wert (Neon) dem theoretisch gerechneten gleichgesetzt. Nach Wentzel ist die Ausbeute

$$u_K = \frac{(z-1)^4}{a \cdot (z-1)^4}$$

Haas<sup>1)</sup> fand das Gesetz bei kleinen *z* gut bestätigt und bestimmte  $a = 0,8 \cdot 10^6$ . Für Neon (*z* = 10) wird

$$u_K = 0,0081.$$

Man erhält damit die Absolutwerte des Nutzeffektes für die anderen Elemente.

1) M. Haas, vgl. a. a. O.

Tabelle 7  
Absolutwerte des Nutzeffekts

Element	Ne	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	C
$u_K$	0,0081	0,0022	0,0015	0,0009

Fig. 3 zeigt die Lage dieser Werte zu der theoretischen Kurve. In einem kleinen Schaubild (oben) ist der Gesamtverlauf von  $u_K$  in Abhängigkeit von der Ordnungszahl  $z$  mit sämtlichen bisher gemessenen Werten wiedergegeben. Die untere Kurve stellt in stark

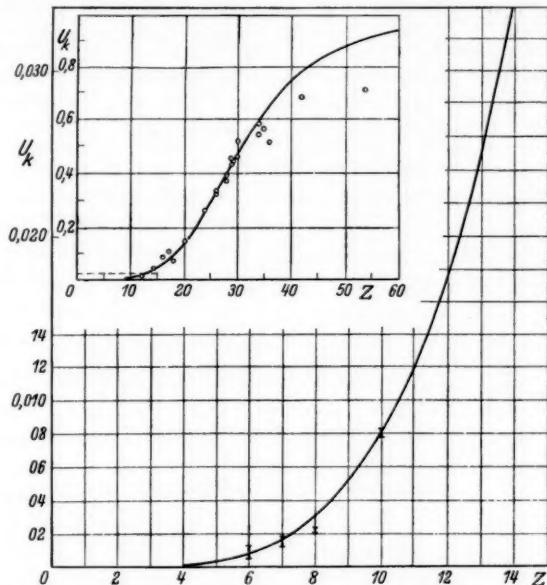


Fig. 3. Nutzeffekt in Abhängigkeit von der Ordnungszahl

vergrößertem Maßstab einen Ausschnitt (oben gestrichelt) aus der Gesamtkurve dar. Die Meßpunkte sind als vertikale Striche aufgetragen, deren Länge den aus der Streuung der Einzelwerte resultierenden Gesamtfehler angibt.

Die gemessenen Werte schließen sich an die theoretische Kurve gut an. Die Wentzelsche Theorie setzt voraus, daß die Wahrscheinlichkeit der inneren Absorption konstant ist. Für die untersuchten Elemente kann die innere Absorption nur im *L*-Niveau stattfinden, ihre Wahrscheinlichkeit wird mit abnehmender Besetzung der *L*-Schale geringer, was gleichbedeutend ist mit einer Zunahme

des Nutzeffektes. Fehlen einem Atom die  $L$ -Elektronen vollständig (H, He), so muß die gesamte absorbierte Energie in Form von Fluoreszenzstrahlung emittiert werden ( $u_K = 1$ ). Die Messungen ergeben mit Sicherheit, daß in dem untersuchten Gebiet von Ne bis C ein Wiederanstieg des Nutzeffektes nicht nachzuweisen ist.

#### V. Zusammenfassung

Es wird der Nutzeffekt  $u_K$  der Röntgen- $K$ -Fluoreszenzstrahlung für die Elemente Ne, N, O, C bestimmt. Die Messung der schwachen Fluoreszenzstrahlung erfolgt durch Zählung mit Hilfe eines Geiger-schen Spitzenzählers.

Die Messungen ergeben die Nutzeffekte als Relativzahlen. Der Betrag der Absolutwerte wird rechnerisch ermittelt durch Anschluß an frühere Messungen. Die Ergebnisse stimmen gut überein mit der Theorie von Wentzel, wonach  $u_K \sim z^4$  ist.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München ausgeführt. Herrn Geheimrat Dr. J. Zenneck möchte ich für sein Interesse an der Arbeit und die Bereitstellung der erforderlichen Hilfsmittel meinen besten Dank aussprechen. Herr Prof. Dr. H. Kulenkampff bin ich für viele wertvolle Ratschläge und seine stete Unterstützung ganz besonderen Dank schuldig. Der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen A.G. danke ich für die Überlassung der Gase.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 9. September 1936)

## *Über die positive Säule in Edelgas-Quecksilber-Gemischen*

**Von K. Siebertz**

(Mit 24 Figuren)

Inhalt: § 1. Übersicht über die spektralen Beobachtungen an Edelgas-Quecksilber-Röhren; Problemstellung. — § 2. Ergänzende elektrische Messungen zum Farbumschlag im Neon-Hg-Gemisch. — § 3. Experimentelle Aufgabe und Versuchsanordnung. — § 4. Gasdruck; Dampfdruck; Kataphorese. — § 5. Beispiele von Sondencharakteristiken. — § 6. Abhängigkeit der Elektronentemperatur vom Quecksilberdampfdruck. — § 7. Diskussion des Maximums der Elektronentemperatur nach Schottkys Theorie der positiven Säule. — § 8. Erklärung des „Umschlagsmechanismus“. — § 9. Erläuterung des „Umschlagsmechanismus“ an den Sondenkurven zur Meßreihe b. — § 10. Berechnung des Umschlagsdrucks aus der „Relaxationsstrecke“. — § 11. a) Erklärung der Stromabhängigkeit; b) Versuch einer Bestimmung der Massen der Ionen. — § 12. Vergleich von Argon und Neon. — § 13. Erklärung des roten Kerns in blauem Mantel. — § 14. Vergleich mit anderen Arbeiten.

### **§ 1. Übersicht über die spektralen Beobachtungen an Edelgas-Quecksilber-Gemischen; Problemstellung**

In Leuchtröhren, welche neben einem Edelgas von einigen Millimetern Druck Quecksilber enthalten, entsteht im normalen Betrieb ein Quecksilberdampfdruck von einigen  $10^{-2}$  mm Hg. Dabei emittiert die positive Säule ausschließlich Spektrallinien des Quecksilbers, unabhängig davon, ob Helium, Neon, Argon oder ein Gemisch dieser Gase als Grundfüllung verwendet werden. Die Röhren verhalten sich jedoch je nach der Grundfüllung völlig verschieden, wenn der Druck des Quecksilbers erniedrigt wird. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> wurden die dabei auftretenden Erscheinungen für Neon-, Neon-Argon- und Argon-gefüllte Leuchtröhren spektroskopisch untersucht und ausführlich beschrieben.

Die auffälligsten Erscheinungen zeigen Röhren, welche außer Quecksilber nur reines Neon enthalten:

1. Bei hohem Quecksilberdruck ist in diesen das Spektrum des Neons so vollständig unterdrückt, daß selbst in vielstündiger Belichtung keine Spur davon beobachtet werden kann.

1) W. Gerlach u. K. Siebertz, *Ztschr. f. Phys.* **91**, 1934, S. 37; vgl. auch F. M. Penning, *Physica I*, Nr. 9, 1934, S. 763; H. Schober, *Ztschr. f. techn. Phys.* **16**, 1935, S. 67.

2. Wird jedoch die Temperatur der Röhren und damit der Quecksilberdruck allmählich erniedrigt, dann tritt in einem ganz schmalen Temperaturbereich das *Neonspektrum plötzlich so stark* hervor, daß die Entladung nicht mehr *blau*, sondern *rot* aussieht, obwohl das blaue Quecksilberleuchten über diesen Umschlag weg nur ganz langsam abnimmt.

3. Kurz vor dem vollständigen Umschlag der Farbe sieht man einen rot leuchtenden Kern in einem blauen Mantel.

4. Mit *Argon* als Grundgas ist von einem derartigen Farbumschlag *nichts zu bemerken*. Schon ein Argonzusatz von 10—20% genügt, um auch im Neon den Umschlag vollständig zu unterdrücken.

Neben diesen sehr auffallenden Erscheinungen bei der Erniedrigung des Hg-Dampfdrucks wurden noch einige interessante Unterschiede im spektralen Verhalten des Quecksilbers (auch bei hohen Drucken) beobachtet, welche in § 12 im einzelnen angeführt sind.

In dieser Arbeit werden zunächst die spektralen Beobachtungen durch einige elektrische Messungen ergänzt. Sodann werden die Resultate von Sondenmessungen mitgeteilt, welche über Temperatur und Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in Abhängigkeit vom Dampfdruck des zugesetzten Quecksilbers Aufschluß geben. Damit erhalten wir einen Einblick in den Mechanismus der positiven Säule, der es ermöglicht, die sämtlichen im Neon—Hg- bzw. Argon—Hg-Gemisch beobachteten Erscheinungen zu erklären.

#### § 2. Ergänzende elektrische Messungen zum Farbumschlag im Neon—Hg-Gemisch

Der Farbumschlag im Neon—Hg-Rohr wird zwar durch physiologische Wirkung besonders deutlich, ist aber sicher nicht dadurch allein vorgetäuscht. Dies zeigt schon die Abhängigkeit der Intensität der Neon- bzw. Argonlinien vom Dampfdruck des Hg (Temperatur des Wasserbades der Röhren) auf den Spektrogrammen.

Eindeutig ergibt sich der Unterschied jedoch aus der Messung der Brennspannung der Röhren als Funktion der Badtemperatur, wie sie in Fig. 1 dargestellt ist: das plötzliche Hervortreten der roten Neonlinien ist begleitet von einem starken Anstieg des Säulengradienten, der knapp in der Gegend der Umschlagstemperatur sogar ein Maximum durchläuft<sup>1)</sup>.

1) Der Kathodenfall bleibt im betrachteten Temperaturbereich nahezu konstant, so daß der Sprung in der Spannung ganz durch den Spannungsgradienten in der Säule gegeben ist. Der Verlauf der Spannung am Rohr zeigt dasselbe Verhalten, wenn nicht das ganze Rohr, sondern nur die positive Säule sich im Wasserbad befindet.

Fig. 2 zeigt, daß der Umschlag durch höhere Ströme nach höheren Temperaturen verschoben wird. Da in diesen Messungen mit der Stromstärke gleichzeitig die Temperatur im Rohr erhöht

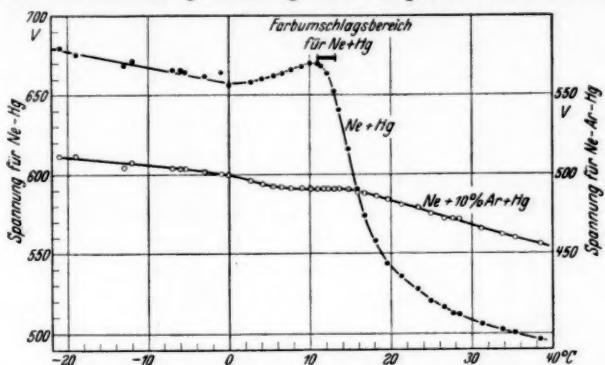


Fig. 1. Brennspannung von Edelgas-Quecksilber-Leuchtröhren in Abhängigkeit von der Röhrentemperatur (Röhren im Wasserbad)

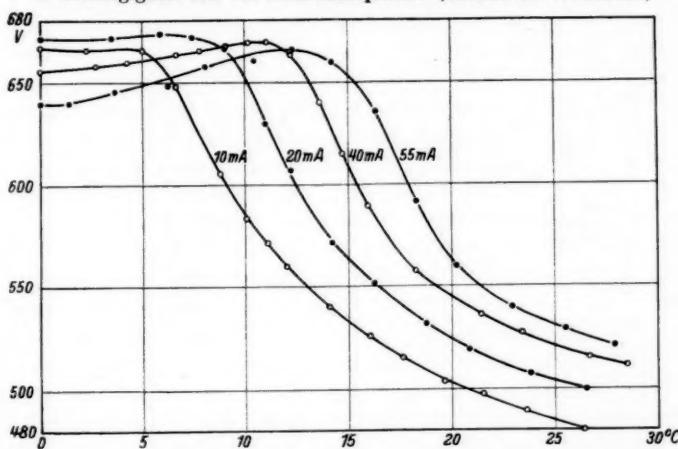


Fig. 2. Brennspannung von Neon-Quecksilber-Leuchtröhren in Abhängigkeit von der Röhrentemperatur; Entladungsstromstärke als Parameter

wird und damit der Hg-Dampfdruck steigt, müßte die Verschiebung des Umschlaggebietes bei konstant gehaltenem Dampfdruck noch stärker sein.

### § 3. Experimentelle Aufgabe und Versuchsanordnung

Zur Erklärung der auffallenden Erscheinungen sollten nun die elektrischen Verhältnisse in der Säule mit Sonden untersucht werden.

In reinem Neon war eine Maxwell'sche Verteilung der Elektronengeschwindigkeiten zu erwarten, ebenso bei Hg-Drucken von solcher Höhe, daß das Hg allein die Entladung trägt.

Es sollten daher nach Langmuir an kalten Sonden in *i-V*-Charakteristiken aufgenommen werden, um 1. die Elektronentemperatur über das Umschlagsgebiet weg zu folgen; 2. mögliche Störungen der Maxwellverteilung zu beobachten, die zu erwarten waren, wenn Hg als „Verunreinigung“ in zunehmender Menge dem Neon als Grundgas zugesetzt wurde.

Die optischen Versuche waren mit Röhren ausgeführt, die flüssiges Quecksilber enthielten — die angegebenen Temperaturen des Wasserbades, in dem die Röhren standen, sagten also nichts über den wirklichen Hg-Druck, da die Innenwand der Röhre durch die Entladung selbst eine höhere Temperatur annahm. Zur besseren Definition des Dampfdrucks sollte deshalb flüssiges Hg in einem Ansatz auf definierter Temperatur gehalten werden. Die Aufnahme statischer Sondencharakteristiken machte ferner nötig, vom Wechselstrombetrieb der Röhren zu Gleichstrom überzugehen.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 3 skizziert. Das Entladungsrohr hat eine lichte Weite von 2 cm. Anode und Kathode sitzen

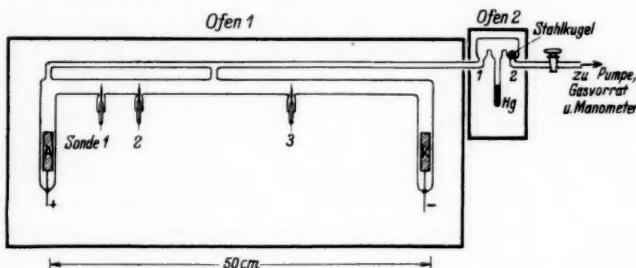


Fig. 3

in rechtwinklig abgebogenen Ansätzen; die Masse ergeben sich aus der Skizze. In der Nähe der Anode und etwa in der Mitte des Rohres sind Ansätze angeblasen, die zum Hg-Vorrat und über diesen zur Vakuumanlage führen. Zu den Versuchen wurde das ganze Rohr in einem elektrischen Ofen auf etwa  $140^{\circ}\text{C}$  gehalten, während der Hg-Vorrat in einem besonderen Ofen auf variable Temperatur gebracht wurde. Die in Fig. 3 skizzierte Anordnung des Hg-Vorrats ermöglichte es, die Diffusion des Hg nach den kälteren Teilen der Pumpanordnung weitgehend zu verhindern, bzw. zum Einfüllen reinen Neons den Hg-Vorrat annähernd ab-

zuschließen. Zu diesem Zweck waren die Rohre 1 und 2 sowie das Röhrchen für das Hg an ein gemeinsames Gefäß angeblasen, und Ansatzstellen erweitert und innen konisch angeschliffen. Eine in die Schlitte passende Stahlkugel verschloß entweder (z. B. zum Ausheizen des Rohres und Einfüllen des Neons) den Hg-Vorrat, oder, zum Entgasen des Hg, Rohr 1, oder, bei Versuchen mit höherem Hg-Druck, Rohr 2.

Die Entladung wurde über Transformator und Gleichrichter aus dem Wechselstromnetz betrieben. Durch große Kapazitäten und Drosselpulen wurde der gleichgerichtete Strom weitgehend geglättet. (Welligkeit im Oszillographen nicht mehr meßbar, sicher  $< 0,5\%$ ). Die Stromstärke wurde zwischen 15 und 40 mA, meist zu 25 mA, gewählt. Die Brennspannung der Röhren lag, je nach dem Quecksilberdampfdruck, zwischen 300 und 390 Volt<sup>1)</sup>.

Das Entladungsrohr konnte im Ofen 1 mit ungefähr 380°C ausgeheizt werden. Zur weiteren Reinigung wurde vor den eigentlichen Versuchen das Rohr mit etwa doppelt so starken Strömen (60 mA Wechselstrom) betrieben und das verunreinigte Gas mehrmals abgepumpt. Doch war es, nachdem das Rohr einmal mit höheren Hg-Dampfdrucken betrieben war, nicht möglich, mit den anwendbaren Temperaturen und Entladungsstromstärken die letzten Reste von Hg daraus zu vertreiben: das Hg-Triplett blieb neben dem Edelgasspektrum stets, wenn auch schwach, sichtbar. Andere Verunreinigungen konnten spektroskopisch nicht bemerkt werden, insbesondere war die Entladung frei von Banden.

Als Sonden dienten Wolframdrähtchen von  $50\ \mu$  Durchmesser, die bis auf ein Ende von 1,5—2 mm Länge durch fein ausgezogene Glasröhren isoliert waren. Das freie Ende stand genau in der Achse des Rohres, und zwar senkrecht zu dieser. Die Sondenspannung wurde über ein Stabilovoltgerät aus dem Gleichstromnetz entnommen und an einem Potentiometer abgegriffen. Ein Nebenschluß zu dem Potentiometer diente dazu, die Spannung im kritischen Gebiet möglichst fein verstetzen zu können. Die Sondenströme betrugen einige  $10^{-6}$  bis  $10^{-3}$  Amp. Die Sondenspannung wurde stets auf das Anodenpotential bezogen.

#### § 4. Gasdruck; Dampfdruck; Kataphorese

Der Druck des Edelgases wurde in allen hier mitgeteilten Versuchen auf 6,5 mm Hg gehalten. Wegen der Temperatur von 140°C

1) Die Messungen zu Figg. 1 und 2 sind an 120 cm langen Rohren von  $2\text{ cm}^2$  Querschnitt ausgeführt; die Brennspannungen sind deshalb entsprechend höher.

im Ofen 1 und der Temperaturerhöhung durch die Entladung selbst ist die *Dichte* des Gases im Entladungsrohr entsprechend kleiner — sie entspricht einem Neondruck von etwa 4 mm für  $t = 0^\circ\text{C}$ . Für den Dampfdruck des Quecksilbers entstand eine erhebliche Unsicherheit durch den Gleichstrombetrieb, weil die elektrische Entmischung durch die Entladung (Kataphorese) das Hg zur Kathode schaffte. Wegen des plötzlichen Umschlags der Farbe der Entladung mit dem Hg-Dampfdruck läßt sich diese Erscheinung besonders gut beobachten. Es ist möglich, den Dampfdruck so zu wählen, daß im Augenblick der Zündung sowie mehrere Sekunden danach das *ganze* Rohr blau leuchtet. Nach wenigen Sekunden<sup>1)</sup> ist das Hg durch die Entladung aus den anodennahen Teilen zur Kathode geschafft, so daß nun z. B. eine Rohrhälfte blau, die andere

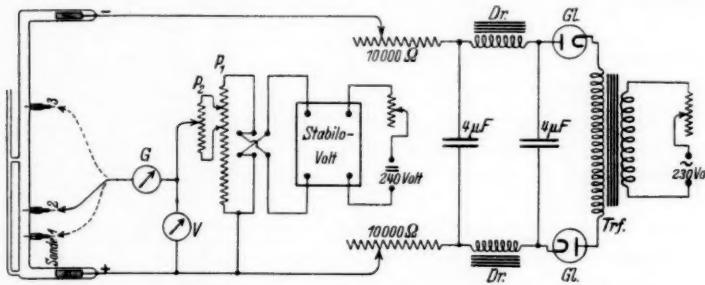


Fig. 4. Schaltkizze.  $G$  Galvanometer,  $V$  Voltmeter,  $P_{1,2}$  Potentiometer,  $Dr$  Drosselspulen,  $Gl$  Gleichrichter

rot leuchtet bzw. je nach dem vorgegebenen Dampfdruck des Hg, ein kleinerer oder größerer Teil der Säule blau bzw. rot brennt. Ich habe in meiner Anordnung versucht, diese für die Messungen sehr lästige Entmischung herabzusetzen. Zu diesem Zweck wurden an *zwei* Stellen des Entladungsrohres (vgl. Fig. 3), und zwar in der Nähe der *Anode* und etwa in der Mitte des Rohres Ansätze zu dem gemeinsamen Hg-Vorrat angeblasen. Damit war es möglich, das Verhältnis der Hg-Dichte in der Anoden- bzw. Kathodenhälfte der Säule auf etwa 1:2 zu halten. (Entladungsstrom: 25 mA). Eine Abschätzung dieses Verhältnisses ergab sich auf folgende Weise: es wird ein Hg-Druck (Temperatur des Hg-Vorrats) gewählt, so, daß das Rohr unmittelbar nach Zündung blau leuchtet, dann aber so umschlägt, daß etwa die Hälfte des Rohres blau, die andere Hälfte rot brennt. Wenn man nun die Temperatur des Hg-Vorrats so weit

1) Abhandlung von Dampfdruck und Stromstärke.

erhöht, daß der Hg-Druck verdoppelt wird, dann bleibt das ganze Rohr blau.

Durch Umpolen der Entladung läßt sich das Hg aus einer Rohrhälfte in die andere befördern, was sich an der Farbe sehr schön verfolgen läßt: wenn das Hg durch eine Entladung nach einer Rohrhälfte gebracht war, dann zündet nach dem Umpolen zuerst die *Anodenhälfte* blau, Kathodenhälfte rot, nach mehreren Sekunden vertauscht sich die Farbe der Rohrhälften. Der Versuch gelingt in meiner Anordnung nur bei nicht zu langem Einschalten, weil sich wegen der Unsymmetrie der Hg-Zuleitung in *langem* Betrieb ein anderes Gleichgewicht einstellt. Zu den Messungen wurde stets das Gleichgewicht in stundenlangem Betrieb des Rohres abgewartet. Die in der Arbeit angegebenen Hg-Drucke sind stets aus der Temperatur des Hg-Vorrats berechnet, *ohne* Korrektur wegen der Temperatur im Entladungsrohr oder zur Berücksichtigung der Entmischung. Da es nicht möglich war, das einmal mit viel Hg beschickte Rohr wieder ganz quecksilberfrei zu machen, sind die Angaben der Hg-Drucke unter  $10^{-3}$  Hg nur zur Orientierung über die von *außen* gegebenen Verhältnisse nützlich, ohne den Hg-Gehalt quantitativ angeben zu können.

#### § 5. Beispiele von Sondencharakteristiken

Figg. 5 bis 9 zeigen einige Beispiele von Sondencharakteristiken. „65“ und „93“ wurden in möglichst reinem Neon erhalten, „39“, „50“,

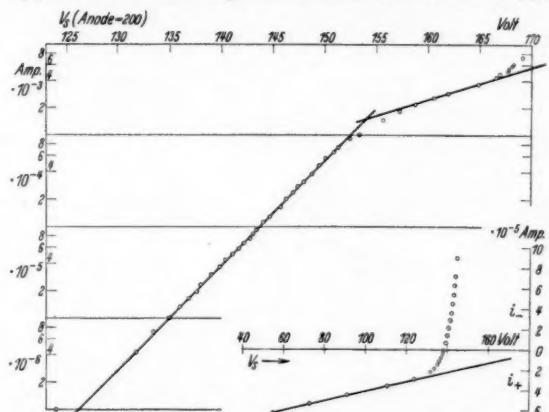


Fig. 5. Sondenkurve (SK.) 65; Neon, Quecksilberdampfdruck  $p_{\text{Hg}} \approx 0,100$  mit Hg-Zusatz entsprechend einem Hg-Druck von  $6,6 \cdot 10^{-3}$ , bzw.  $8 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,6 \cdot 10^{-2}$  mm Hg.

Bei den Messungen kam es darauf an, nicht nur Werte für die Elektronentemperaturen zu erhalten, sondern auch Abweichungen von der Maxwellschen Verteilungskurve (MVK.), besonders auch im Bereich schneller Elektronen, nach Möglichkeit zu erkennen.

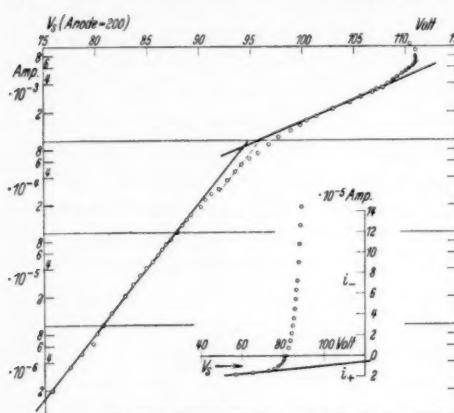


Fig. 6. SK. 93; Neon,  $p_{\text{Hg}} \approx 0$

gegen die Spannungsachse durfte nicht vernachlässigt werden, sondern es wurde für jeden einzelnen Stromwert die nach der Extrapolation zugehörige  $i_+$ -Korrektur graphisch oder rechnerisch abgezogen.

Zur Auswertung nach § 11 mußte auch das Raumpotential bekannt sein. Dessen Bestimmung war aus dem Knick der  $\ln i$ -V-Kurve nicht sehr genau möglich, doch ergab sich in vielen Fällen eine gute Kontrolle des Raumpotentials aus dem sehr scharfen Einsetzen der Stoßionisation in der Schicht.

Um Abweichungen von

der Geradlinigkeit im  $\ln i$ -V-Diagramm, also Abweichungen von der Maxwellverwertung sicher erkennen zu können, wurde für jede Kurve etwa 50 Meßpunkte aufgenommen. Insgesamt wurden über

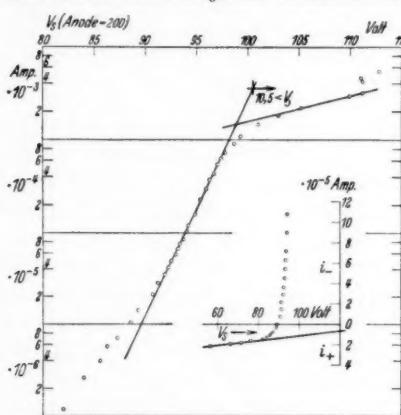


Fig. 7. SK. 39; Neon + Hg,  
 $p_{\text{Hg}} = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$

100 Sondenmessungen ausgeführt, davon über 70 an dem hier beschriebenen Rohr mit 3 Sonden; an Sonde 2 relativ mehr als an Sonde 1 und 3, die im wesentlichen zu Vergleichen bei Entmischung im Rohr und zur Kontrolle von Raumpotentialen mit Hilfe des Gradienten dienen sollten<sup>1)</sup>. Die Berechnung des Raumpotentials aus dem Einsetzen der Stoßionisation durch Subtraktion der Ionisierungsspannung liefert häufig, besonders in Hg-Dampf, Werte, die gegenüber dem Knick der  $\ln i - V$ -Kurve nach „höher positiven“ Sonden spannungen verschoben sind. Dies deutet ähnlich wie der flache Übergang statt des Knicks auf ein Defizit an langsamem Elektronen gegenüber der Maxwellschen Verteilung.

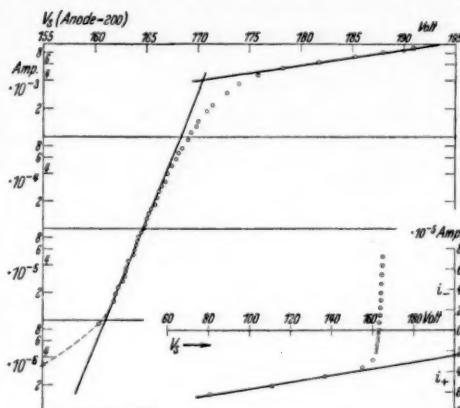


Fig. 8. SK. 50; Neon + Hg,  
 $p_{\text{Hg}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$

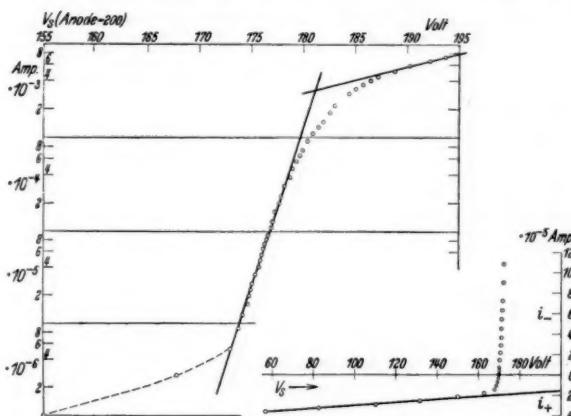


Fig. 9. SK. 100; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ mm Hg}$

1) Sonde 2 war auch deshalb zur Auswertung am günstigsten, weil sie am nächsten zur halben Länge der positiven Säule stand und dort der Quecksilberdruck durch die Entmischung am wenigsten verfälscht wurde.

(Aus diesem Grunde unterblieb die Bestimmung des Raupotentials aus der  $i^2-V$ -Kurve.)

Als Beispiel für die Reproduzierbarkeit zeige ich die Kurven 34 und 35, welche unter denselben Bedingungen, aber im Abstand von 2 Tagen aufgenommen wurden (Fig. 10). Wegen der geringen Entladungsstromstärke befinden wir uns im Fall des Neons im

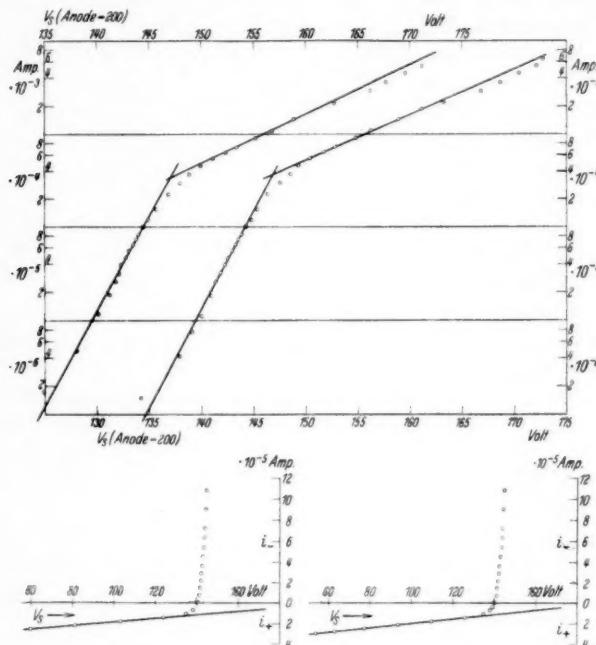


Fig. 10. SK. 34 und 35; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$

Bereich der laufenden Schichten. Das macht sich bei der Aufnahme der Sondencharakteristiken dadurch bemerkbar, daß das Galvanometer bei *kleinen* Elektronenströmen nicht ruhig steht, sondern um einen mittleren Wert schwankt. Der Ionenstrom ist auch hier vollständig konstant, ebenso wird die Schwankung bei höheren Elektronenströmen unmerklich klein. In der Entladung mit viel Hg (blau) bleibt das Galvanometer stets vollständig ruhig. Es sieht danach so aus, als würde ein gleichmäßiger, homogener „Grund“ mit den in unseren Kurven gemessenen Elektronentemperaturen die Entladung bestimmen, während die „laufenden Schichten“

als Elektronenwolken kleinerer Konzentration über die Sonden weglaufen, so daß die Stromschwankungen durch die laufenden Schichten nur neben *kleinen* Sondenströmen bemerkt werden.

#### § 6. Abhängigkeit der Elektronentemperatur vom Quecksilberdampfdruck

Aus den bisher gezeigten Beispielen war schon zu sehen, daß die Sondencharakteristiken durch Zumischung geringer Quecksilbermengen (1—2%) stark verändert werden. Zunächst soll jedoch nur der Unterschied in der Elektronentemperatur ( $T_e$ ) betrachtet werden, wobei  $T_e$  aus der Neigung des geradlinigen Teils der  $\ln i - V$ -Kurve entnommen wird<sup>1)</sup>. Ich gebe deshalb in Fig. 11 in 2 Meßreihen die Ergebnisse für die Sonde 2, welche die Elektronentemperatur in Abhängigkeit vom Druck des Hg darstellen. *a* war die erste mit dem hier beschriebenen Rohr ausgeführte Meßreihe, *b* eine besonders sorgfältige ausgeführte Wiederholung. Die in *b* eigens bezeichneten Punkte wurden *nach* dem Durchlaufen der übrigen Meßreihe *b* ausgeführt.

Meßreihe *a* wurde leider nicht zu genügend hohen Hg-Drucken fortgesetzt, so daß auch bei den höchsten Hg-Drucken die Elektronentemperatur noch nicht merklich unter den Ausgangswert für „reines“ Neon gesunken ist<sup>2)</sup>. Ich zeige sie deshalb, weil an ihr besonders gut zu sehen ist, daß mit allmählich steigendem Zusatz von Hg zu Neon die Elektronentemperatur bei etwas über 0,003—0,004 mm Hg zu einem Maximum ansteigt, um darauf sehr plötzlich abzufallen. Nach dem Durchlaufen der Meßreihe *a* wurde vor Beginn der Reihe *b* ausgepumpt und ausgeheizt. Es scheint jedoch, daß das Hg jetzt nicht mehr ganz aus dem Rohr gebracht werden konnte, und daß dadurch die Werte der Elektronentemperatur für kleinste Hg-Drucke („reines“ Neon) beträchtlich erhöht werden. So sind in diesem Gebiet

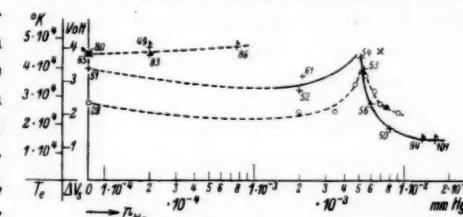


Fig. 11. Elektronentemperatur  $T_e$  in Abhängigkeit vom Quecksilberdampfdruck; Grundfüllung: Neon.  
 ○ Meßreihe *a*; +, f Meßreihe *b* — 25 mA.  $\times$  40 mA.  
 • 15 mA ( $\Delta V_s$ : Differenz der Sondenspannung, über der der Sondenstrom auf das 2,718fache ansteigt)

1)  $\Delta V_s = k T_e$ , wenn über  $\Delta V_s$  der Sondenstrom auf das 2,718-fache steigt. Die mittlere Elektronenenergie in Volt ergibt sich aus  $e \cdot V_m = \frac{3}{2} k T_e$ .

2) An Sonde 3 war sie bereits auf 1,4 Volt gesunken, weil durch die Entmischung dort der Hg-Druck höher ist.

auch die Werte, die *nach* den Messungen mit hohem Hg-Druck beobachtet wurden, nochmals höher als zu Beginn der Meßreihe *b*, als das Rohr noch etwas weniger durch Hg verseucht war. Auf welche Weise Hg-Zumischungen unter 0,001 mm Hg die Elektronentemperatur im Neon so auffallend erhöhen sollten, kann ich nicht sagen. Vielleicht ist es einfach nicht möglich gewesen, das einmal mit Hg verseuchte Rohr auf weniger als 0,5% Hg-frei zu machen, so daß wir nicht wesentlich unter das Maximum der Elektronentemperaturkurve kommen. Für den hier untersuchten „Umschlag“ ist jedoch diese Frage ohne Interesse, so daß ich der folgenden Diskussion die Meßreihe *b* zwischen Hg-Drucken von 0,002 bis etwa 0,02 mm Hg zugrunde legen möchte.

#### § 7. Diskussion des Maximums der Elektronentemperatur.

(Nach Schottkys Theorie der positiven Säule)

Zum Verständnis des Folgenden sei kurz an die Schottkysche Theorie der positiven Säule erinnert<sup>1)</sup>. Danach sind die elektrischen Verhältnisse durch folgende Faktoren bestimmt:

1. Die Säule ist nahezu raumladungsfrei:  
 $n^+ = n^- = n$  (Elektronenkonzentration = Ionenkonzentration).
2. Es besteht ein Konzentrationsgefälle von der Rohrachse zur Wand. Dieses führt zur „ambipolaren“ Diffusion der Ionen und Elektronen an die Wand, wo sie durch Rekombination verschwinden. An der Wand ist demnach  $n = 0$ .
3. Die Neuerzeugung von Ionen muß den Diffusionsverlust zur Wand ( $\gg$  Volumsverlust!) decken.
4. Die Elektronentemperatur stellt sich so hoch ein, daß 3. erfüllt ist.
5. Die Zahl der in jedem Volumselement pro sec neuerzeugten Ionen ist der Zahl der vorhandenen Elektronen proportional (Proportionalitätsfaktor =  $\beta$ ).
6. Mit der Annahme, daß die Elektronen nach der Maxwell-schen Kurve über alle Geschwindigkeiten verteilt sind, daß ferner die Ionisierungswahrscheinlichkeit als Funktion der Elektronengeschwindigkeit bekannt ist<sup>2)</sup>, erhalten wir einen Ausdruck für  $\beta$

1) W. Schottky, Phys. Ztschr. 25. S. 342, 635. 1924; W. Schottky und I. v. Issendorff, Ztschr. f. Phys. 31. S. 163. 1925 vgl. auch R. Seeliger, Einf. in die Physik der Gasentl. S. 459. 1934 und A. v. Engel u. M. Steenbeck, Gasentladungen II, S. 82 ff.

2) Für nicht zu große Elektronengeschwindigkeiten ist die Ionisierungswahrscheinlichkeit  $P(V) = c \cdot (V - V_J)$ ;  $V$  = Voltgeschwindigkeit;  $V_J$  = Ionisierungsspannung;  $c$  = Proportionalitätsfaktor für das betr. Gas.

und können damit die Elektronentemperatur  $T_e$  sowie  $n$  als Funktion von  $r$  (Abstand von der Achse) berechnen.

Wesentlich für unsere Diskussion ist vor allem 4. und 5.:

Es müssen — grob ausgedrückt — in dem Ausläufer der Maxwellverteilung über den kritischen Geschwindigkeiten noch genügend Elektronen zur Anregung und Ionisation zur Verfügung sein. Wenn der Hg-Druck sehr hoch ist, darf dabei die Ionisierungswahrscheinlichkeit für das einzelne Elektron klein sein: durch die große Zahl der Zusammenstöße mit Hg-Atomen wird die kleine Wahrscheinlichkeit der Ionisierung beim einzelnen Stoß kompensiert. Es genügen daher Elektronen, deren Geschwindigkeit die Ionisierungsspannung  $V_J$  wenig überschreitet, obwohl für diese nach

$$P(V) = c \cdot (V - V_J)$$

die Ionisierungswahrscheinlichkeit  $P(V)$  nur klein ist.

Mit sinkendem Hg-Druck müssen wir die geringere Ausbeute dadurch wieder ausgleichen, daß wir die Ionisierungswahrscheinlichkeit des einzelnen Stoßes erhöhen — also *schnellere* Elektronen in größerer Zahl zur Verfügung stellen: dies geschieht durch Erhöhung der Elektronentemperatur. Wir erwarten also nach der Schottkyschen Vorstellung vom Mechanismus der Säule einen stetigen Anstieg der Elektronentemperatur vom niedrigen Wert bei hohen Hg-Drucken zum höheren Wert für reines Neon. Das läßt sich in einer formalen Erweiterung der Ansätze nach Schottky auf Gemische von Gasen auch mathematisch formulieren<sup>1)</sup>.

Tatsächlich beobachten wir jedoch im Neon-Hg-Gemisch von hohen Drucken her kommend einen auffallend *plötzlichen* Anstieg der Elektronentemperatur zu einem *Maximum*, das *höher* liegt als die Werte für reines Neon, mit anschließendem Wiederabfall. Daß wirklich ein Maximum durchlaufen wird, zeigt auch die Messung des Gradienten als Funktion des Hg-Druckes (Temperatur des Wasserbades), welche gleichzeitig eine *Stromabhängigkeit* des Effekts erkennen läßt.

Es liegt nahe für den plötzlichen Anstieg und die Stromabhängigkeit die elektrische Entmischung verantwortlich zu machen. Denn:

1. Sobald Hg merklich ionisiert wird, setzt auch die Entmischung ein: die Ionisierung erfolgt auch bei hoher Elektronentemperatur mit größerer Ausbeute, so daß die Entmischung den Anstieg der Elektronentemperatur steiler macht als zunächst erwartet wird.

1) H. B. Dorgelo, H. Alting u. C. I. Boers, *Physica* II 9. S. 959. 1935.  
Vgl. auch § 14 dieser Arbeit.

2. Mit höherem Strom ist die Entmischung stärker, der „Umschlag“ erfolgt bei scheinbar höheren Hg-Drucken. Daß jedoch die Entmischung nicht die *entscheidende* Rolle spielt, sieht man daran, daß sie 1. das Auftreten eines Maximums nicht erklären kann, 2. der Effekt dann im Neon mit 10% Argon bzw. im Argon auch auftreten müßte, in dem die Entmischung mindestens ebenso stark ist<sup>1)</sup>.

Wir suchen deshalb nach einem Mechanismus, der

1. die auffallende Steilheit im Anstieg der  $T_e$ ,

2. die Stromabhängigkeit des Umschlags,

3. den Unterschied gegen Argon verständlich macht, das weder optisch noch elektrisch einen „Umschlag“ erkennen läßt.

#### § 8. Erklärung des „Umschlagsmechanismus“.

Bei den bisherigen Überlegungen wurde vorausgesetzt, daß die Elektronen, ihrer Temperatur entsprechend, nach dem Maxwell-schen Gesetz über alle Geschwindigkeiten verteilt sind. Nun zeigen aber die Sondencharakteristiken in Neon + viel Hg, daß diese Voraussetzung bei unseren Versuchen nicht zutrifft. So liegen z. B. in den Kurven „50“ und „100“ die Meßpunkte nur bis zu einer Sondenspannung von 8—10 Volt unter dem Raumpotential auf der  $\ln i - V$ -Geraden und weichen dann sehr stark ab. Etwa 15 bis 16 Volt unter dem Raumpotential ist praktisch überhaupt kein Elektronenstrom mehr zu messen. Wir schließen daraus, daß — jedenfalls bei den hier angewandten Stromstärken und Hg-Drucken — die Maxwell-sche Verteilungskurve sicher nicht bis über die Anregungsenergien des Neons (16,6 Volt) besetzt ist. Es werden also zur Anregung und Ionisierung des Quecksilbers alle Elektronen in dem Ausläufer der Verteilungskurve ( $> V/\text{ionis. Hg}$ ) so schnell verbraucht, daß im dichten Hg-Dampf keine „Zeit“ zur Einstellung der „wahrscheinlichsten“ Verteilung bleibt, welche auch schnelle Elektronen liefern müßte. Damit ist die spektroskopische Beobachtung erklärt, daß auch mit vielstündiger Belichtung keine Spur des Neonspektrums beobachtet werden kann.

1) Über die Entmischung von Gasgemischen in der positiven Säule ist noch sehr wenig bekannt. Für unseren Fall können wir nur etwa folgendes schließen: 1. eine merkliche Druckdifferenz im Edelgas ist nicht zu erwarten. 2. Die Entmischung erfolgt also nur dadurch, daß das leichter ionisierbare Hg im Potentialgefälle der Säule zur Kathode beschleunigt wird. Solange nur das Hg die Entladung trägt, sollte die Entmischung im Neon und Argon in erster Näherung gleich sein, da ein evtl. Einfluß des Gases Ionenbeweglichkeit und Diffusionskoeffizient des neutralen Hg-Atoms (Rückdiffusion  $\rightarrow$  Anode) in ähnlicher Weise betreffen würde. Nach meinen Beobachtungen scheint die Entmischung im Argon sogar stärker zu sein.

Mit sinkendem Hg-Druck wird nun, wie oben beschrieben, die nötige Ionisierung dadurch aufrecht erhalten, daß die Elektronen-temperatur steigt und damit *schnelle* Elektronen in größerer Zahl zur Verfügung stehen. Die geringe Ausbeute des Einzelstoßes macht sich in den Sondenkurven dadurch bemerkbar, daß die Maxwell'sche Verteilungskurve über 10 Volt nicht mehr ganz abgeschnitten wird, sondern nur im Bereich optimaler Anregung des Hg ein Defizit aufweist, während *schnelle* Elektronen in meßbarer Anzahl vorhanden sind. Sobald nun mit steigender Elektronen-temperatur und abnehmendem Hg-Druck genügend Elektronen mit Geschwindigkeiten über 16,6 e-Volt zur Verfügung stehen, werden die zum Teil metastabilen *s*-Terme des Neons mit großer Ausbeute angeregt. Da nun langsame Elektronen nach der Maxwellverteilung in großer Zahl vorhanden sind, werden von den metastabilen *s*-Termen aus die *p*-Terme des Neons mit großer Wahrscheinlichkeit angeregt, so daß das rote Neonspektrum sehr lichtstark herauskommt. Wir haben in den metastabilen Neonatomen sozusagen ein drittes Gas mit sehr kleiner Anregungsspannung zugemischt. Weil damit das *Neon* als Energieverbraucher neben dem Quecksilber auftritt, muß gleichzeitig die Elektronentemperatur steigen — damit wieder die Neonanregung usf. —, so daß der Vorgang sich zu hohen Elektronentemperaturen aufschaukelt. Diese Erhöhung der Elektronentemperatur kann jedoch nicht in dem Maß zur Erhöhung der Ionisierungsausbeute für das Quecksilber führen, wie das vor dem Farbumschlag zum Ausgleich der abnehmenden Hg-Dichte der Fall war: das Neon verbraucht gerade die schnellen Elektronen, welche dazu nötig wären, zu seiner Anregung. Gleichzeitig werden die Triplettsysteme des Quecksilbers stark angeregt, weil für diese der Bereich optimaler Anregung bei der hohen Elektronentemperatur (ungestört vom Neon!) stark mit Elektronen besetzt wird. Das Verhältnis der anregenden zu den ionisierenden Stößen wird also für das Quecksilber mit steigender Elektronentemperatur zugunsten der Anregung verschoben. Der scharfe Anstieg von  $T_e$  ist also so zu verstehen, daß in diesem kritischen Gebiet die Anregung des Neons und Quecksilbers stärker mit  $T_e$  zunimmt als die Ionisierung des Quecksilbers. Zur Aufrechterhaltung der Ionisation muß deshalb mit abnehmendem Hg-Druck  $T_e$  sehr viel stärker ansteigen, als zum Ausgleich der geringen Ionisierungsausbeute allein nötig wäre. Die Elektronentemperatur steigt deshalb sogar über die Werte im reinen Neon. Wenn damit auch die Möglichkeit besteht, daß das *Neon* an Stelle des Quecksilbers ionisiert wird, so kommen wir doch nicht mit der *Elektronentemperatur der reinen Neonentladung* aus,

weil das bei der hohen Elektronentemperatur leicht anregbare Quecksilber dem Elektronengas Energie entzieht, während seine leichte Ionisierbarkeit neben dem Neon nicht ausgenützt werden kann. Erst wenn der Quecksilberdruck weiter sinkt, kann die Elektronentemperatur wieder fallen, weil das Quecksilber als „Verbraucher“ allmählich wegfällt.

Neben der beschriebenen Anregung des roten Neonspektrums von den metastabilen Atomen aus wird natürlich auch die direkte Anregung der  $p$ -Terme zur Emission beitragen, sobald genügend Elektronen über 18,5 Volt zur Verfügung stehen. Welche der Anregungsarten überwiegt, läßt sich aus den Beobachtungen nicht entscheiden. In der Literatur wurde mehrfach gezeigt, daß auch in der reinen Neonentladung die stufenweise Anregung schon bei kleinen Stromstärken eine beträchtliche Rolle spielt<sup>1)</sup>.

Vielleicht darf auch die Abweichung bei  $\sim 2$  Volt unter dem Raumpotential, die ich in reinem Neon mehrfach, ähnlich wie in Fig. 19, Kurve 61, erhalten habe, als Hinweis auf den Verbrauch von 2-Voltelektronen und damit auf die stufenweise Anregung deutet werden.

### § 9. Erläuterung des Umschlagsmechanismus an den Sondenkurven zur Meßreihe b

In Figg. 13—19 sind die Sondenkurven der Meßreihe b wiedergegeben, um zu zeigen, wie die besprochenen Störungen der Maxwellverteilung sich in den  $\ln i - V$ -Charakteristiken auswirken.

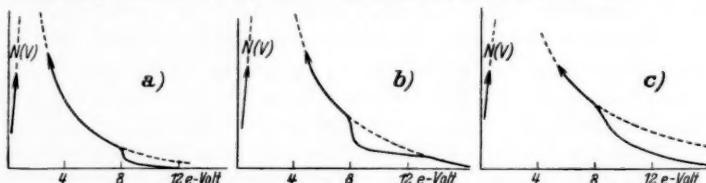


Fig. 12.  $N(V) \sim$  Zahl der Elektronen der Geschwindigkeit  $e$ -Volt  
aus den Sondenkurven geschlossener Verlauf; --- Abfall einer  
MVK.-Kurve entsprechend der El.-Temperatur  $T_e$ . (Die Kurven sind rein  
schematisch zu nehmen, der Abfall der MVK. ist so steil, daß eine maßstäbliche  
Darstellung des ganzen Geschwindigkeitsbereichs nicht möglich ist)

Die Kurven „94“ und „101“ (Figg. 13 und 14) wurden bei den höchsten verwendeten Hg-Drucken aufgenommen, „94“ in Neon mit Quecksilber von  $1,33 \cdot 10^{-2}$  mm Druck, „101“ mit Argon als Grundfüllung<sup>2)</sup>

1) H. Schillbach, Ann. d. Phys. [5] 18, S. 722. 1933; M. I. Druyvesteyn, Physica 11, S. 129. 1931; H. Kopfermann u. R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 48, S. 26. 1928.

2) Die Messungen mit Argon wurden nach Beendigung der Meßreihe b ausgeführt.

und etwas mehr Hg ( $1,6 \cdot 10^{-2}$  mm). Die Entladung brennt in beiden Fällen rein blau, das Edelgasspektrum ist völlig unterdrückt. Die Elektronentemperaturen sind etwa gleich hoch, die Sondenkurven von demselben Typ. Bei ungestörter Maxwellverteilung müßte der Logarithmus des Elektronenstromes, sobald dieser meßbar wird, in einer Geraden über der Sondenspannung ansteigen, deren Neigung durch  $T_e$  bestimmt ist. In den Kurven 94 und 101 ist die Abweichung von der  $i^+$ -Korrektur  $\sim 20$  Volt unter dem Raumpotential so klein, daß sie innerhalb der Meßfehler bleibt. Selbst wenn wir sie für reell nehmen wollten, steigt doch der dieser Abweichung entsprechende Elektronenstrom zwischen 20 und 10 Volt Gegenspannung der Sonde kaum an, jedenfalls sehr viel langsamer als der Elektronentemperatur entspricht. Erst  $\sim 10$  Volt unter dem Raumpotential setzt der Elektronenstrom merklich ein, um dann von  $\sim 8$  Volt an der Maxwell'schen Verteilung entsprechenden Geraden zu folgen. Die Kurven ent-

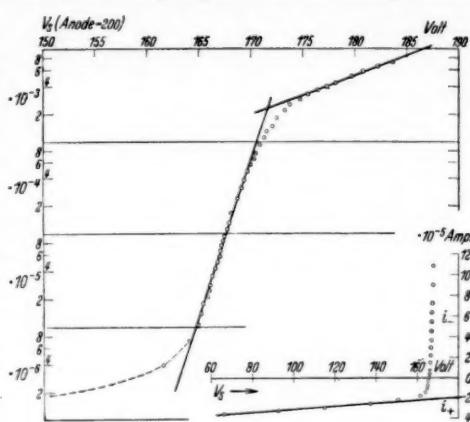


Fig. 13. SK. 101; Argon + Hg,  
 $p_{\text{Hg}} = 1,6 \cdot 10^{-2}$  mm Hg

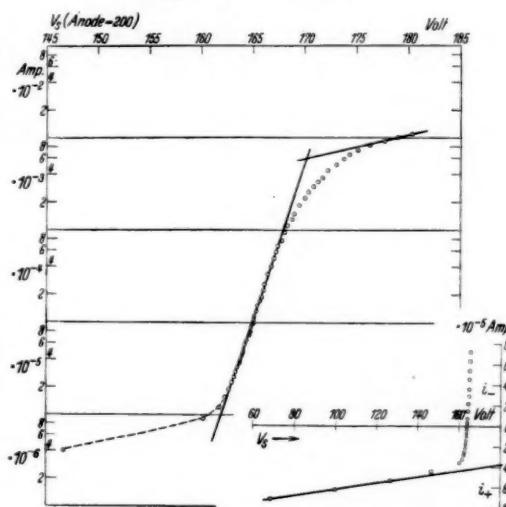


Fig. 14. SK. 94; Neon + Hg,  
 $p_{\text{Hg}} = 1,33 \cdot 10^{-2}$  mm Hg

sprechen etwa dem Schema der Fig. 12a<sup>1)</sup>. Die MVK. ist bei 8 Volt scharf abgeschnitten, es bleibt nur ein schwacher Ausläufer bis 10—12 Volt, darüber ist der Elektronenstrom unmeßbar klein.

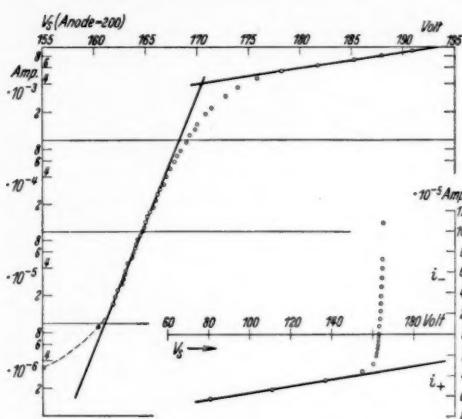


Fig. 15. SK. 50; Neon + Hg,  
 $p_{\text{Hg}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$

zwar auch  $\sim 9$  Volt unter dem Raumladungspotential ab, läuft jedoch bei einigen Volt höherer Elektronengeschwindigkeit wieder in

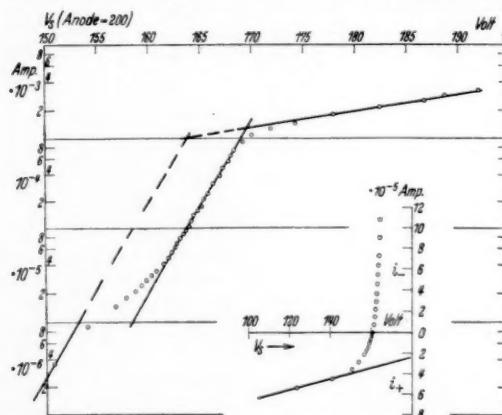


Fig. 16. SK. 56; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$

rungen der MVK. bei einzelnen Anregungsspannungen zu deuten. Da jedoch diese Abweichungen fast innerhalb der Meßfehler liegen, ist es berechtigt, eine Ausgleichsgerade durchzulegen, zumal eine Zuordnung der einzelnen Stufen wegen der Unsicherheit der Spannungswerte (Raumpotential!) nicht möglich ist.

1) Die bei 8 Volt gezeichnete Stufe ist in den Sondenkurven dadurch angedeutet, daß der Strom in einem schmalen Spannungsbereich stärker ansteigt als  $T_e$  entspricht. Derartige „Stufen“ habe ich auch im sonst geradlinigen Teil der Sondenkurven häufig erhalten, besonders deutlich z. B. in Kurve 69 (Fig. 22, S. 445) bei einem Entladungsstrom von 15 mA. Es liegt nahe, diese Stufen als kleine Stö-

eine Parallele zur ursprünglichen Geraden ein: wegen des geringen Hg-Drucks werden nicht alle Elektronen  $> 8-10$  Volt zur Anregung und Ionisierung verbraucht, haben also Gelegenheit, in den Plasmafeldern noch Energie zu gewinnen zur Auffüllung der Verteilungskurve nach höheren Geschwindigkeiten. Die Verteilungskurve zeigt, dem Schema der Fig. 13b entsprechend, nur mehr ein „Defizit“ in einem gewissen Bereich, die Ionisierung bleibt trotz des geringen Hg-Drucks ausreichend, weil durch Erhöhung der Elektronentemperatur auch die Zahl der Elektronen  $> 10,4$  Volt stark zugenommen hat. Wir erhalten jetzt sogar genügend Elektronen, deren Geschwindigkeit zur Anregung des Neons ausreicht: die Farbe der Entladung schlägt nach rot um, während das Rohr bei SK. 50 noch rein blau leuchtet.

Die Kurven 53 und 54 (Figg. 17 und 18) sind unmittelbar im Umschlagsgebiet aufgenommen. Während die Sondenmessungen sonst, aufwärts und abwärts durchlaufen, sehr genau daselbe geben, erhalte ich im Umschlagsgebiet verschiedene Kurven, je

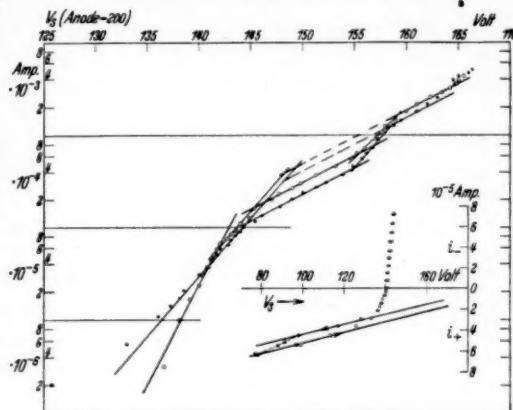


Fig. 17. SK. 53; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 5,4 \cdot 10^{-3}$  mm Hg

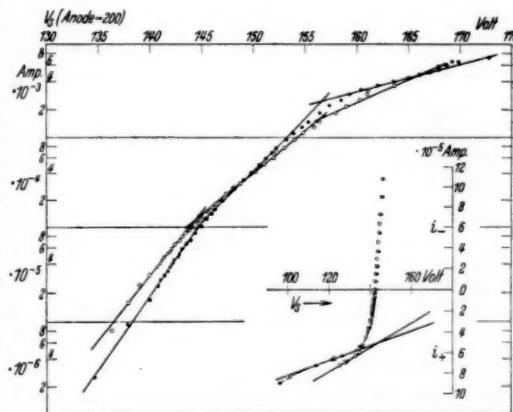


Fig. 18. SK. 54; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 5,2 \cdot 10^{-3}$  mm Hg

nachdem, ob die Sonde vor Beginn der Messung längere Zeit hoch positiv oder hoch negativ gegen die Umgebung gehalten war. Dies ist so zu verstehen, daß in diesem Bereich steilsten Anstiegs der

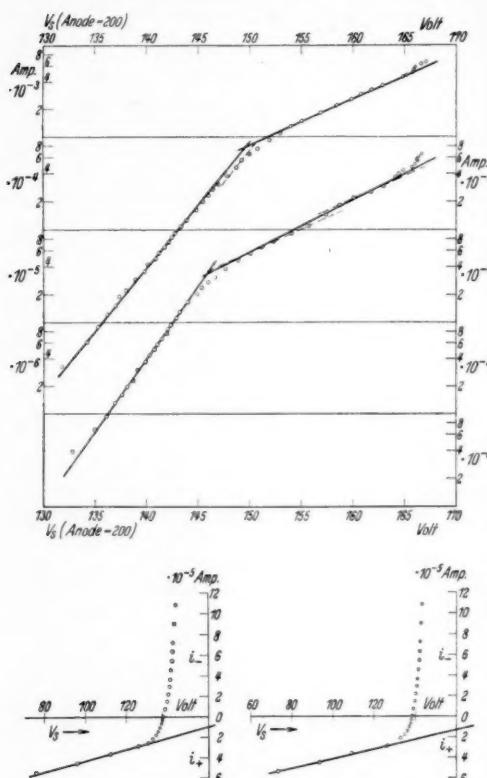


Fig. 19 und 20.

(links): SK. 61; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$   
 (rechts): SK. 52; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$

den geknickten Kurven, daß die Elektronentemperatur — aus dem oberen geradlinigen Stück abzulesen — um so höher ist, je größer die Steilheit nach dem Knick ist: je größer also das Defizit an schnellen Elektronen ist. Dies zeigt Fig. 18 an einer einzigen in zwei Rich-

1) Über unvollkommen ausgebildete und durch „Verunreinigungen“ gestörte Maxwellverteilungen vgl. M. J. Druyvesteyn, Ztschr. f. Phys. 64. S. 781. 1930; Phys. Ztschr. 33. S. 856. 1932.

Elektronentemperatur mit sinkendem Hg-Druck die Entmischung in der Umgebung der Sonde durch den Sondenstrom selbst bereits genügt, die Elektronentemperatur erheblich zu verändern. Wir erhalten jetzt geknickte Kurven, die jedoch nicht wie bei Langmuir als Summe zweier Verteilungskurven aufzufassen sind, sondern nach dem Schema der Figur 12c als Kurven hoher Elektronentemperatur, die zwar auch über 10 Volt weniger Elektronen enthalten als der MVK. entspricht, aber nicht scharf abgeschnitten sind, sondern nach hohen Elektronengeschwindigkeiten immer mehr gegenüber der MVK. zurückbleiben<sup>1</sup>). Wir sehen an

tungen durchlaufenden Meßreihe: aufwärts, d. h. von hoch *negativer* Sonde kommend, beobachten wir ein größeres „Defizit“ und *höhere* Elektronentemperatur als „abwärts“, weil die *negative* Sonde das Hg in ihrer Umgebung anreichert. Die „abwärts“ gemessene Kurve gehört also nach unserer Hypothese sozusagen bereits *jenseits* des Maximums der Elektronentemperatur in den Abfall nach kleineren Drucken.

Bei noch etwas niedrigeren Quecksilberdrucken sinkt die Elektronentemperatur wieder, bei  $2 \cdot 10^{-3}$  mm Hg (SK. 52 und 61, Figg. 19 und 20) kann keine Störung der MVK. mehr bemerkt werden, die Elektronentemperatur ist allerdings noch höher als in reinem Neon.

#### § 10. Berechnung des Umschlagdrucks aus der „Relaxationsstrecke“

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß der Umschlag mit großer Schärfe einsetzt, sobald *überhaupt* Elektronen so hoher Geschwindigkeit vorkommen, daß Neon angeregt werden kann; wenn dies der Fall ist, steigen Elektronentemperatur, damit Anregung, damit wieder Elektronentemperatur usw. scharf an zum Maximum. Um den Umschlag zu verhindern, muß also die Maxwellsche Verteilung nach hohen Geschwindigkeiten tatsächlich abgeschnitten sein, die Elektronen von 10—16 e-Volt müssen „verbraucht“ sein, ehe sie durch den Mechanismus, der die Maxwellsche Verteilung bewirkt, über alle Geschwindigkeiten verteilt werden. Wesentlich für diesen Mechanismus ist der Energieaustausch der Elektronen in den „Mikrofeldern“ des Plasmas, also den elektrostatischen Feldern der Ionen und Elektronen. Diesbezügliche Rechnungen sind erstmals von D. Gabor<sup>1)</sup> ausgeführt worden. Danach kann man die Strecke berechnen, die ein Elektron braucht, um eine Energie umzusetzen, die der seiner Elektronentemperatur entsprechenden mittleren Energie gleich ist. Eine Strecke dieser Größenordnung muß offenbar von den Elektronen durchlaufen werden, ehe aus einer ungeordneten Verteilung die „wahrscheinlichste“, die Maxwellsche Verteilung entsteht.

Diese „Relaxationsstrecke“  $S$  ist gegeben durch

$$S \simeq 1,8 \cdot 10^3 \frac{T_e^2}{N} \quad (N = \text{Ionenkonzentration})^2.$$

Man kann nun einen Überschlagswert für den „Umschlagsdruck“ abschätzen, wenn man als Bedingung für den Umschlag formuliert:

„Der Umschlag wird verhindert, solange die Relaxationsstrecke  $S$  größer ist als die freie Weglänge im Quecksilberdampf“.

1) D. Gabor, Physik. Ztschr. **34**, S. 38. 1936.

2) Vgl. A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen II, S. 23.

Zur Berechnung von  $S$  müssen wir außer  $T_e$  noch die Ionenkonzentration  $N$  kennen. Diese läßt sich aus der Elektronenstromdichte  $j^-$  berechnen nach

$$j^- = e \cdot N \cdot \sqrt{\frac{k T_e}{2 \pi m}}.$$

$j$  erhält man aus  $i^-/f$ , wobei  $i^-$  den Elektronenstrom für Sondenspannung = Raumpotential,  $f$  die Oberfläche der Sonde bedeutet.

Aus den Sondendimensionen ( $2r = 0,005$  cm,  $l = 0,18$  cm) wird  $f = 0,00282$  cm $^2$ .

Als Mittelwerte zur Berechnung legen wir zugrunde

In „reinem“ Neon	In Neon + viel Hg (über dem Umschlag, rein blau)
$T_e = 35000^\circ$ K $i^- = (V_S = V_R \cdot \text{Pot.})^{1,05}$ mA	$15000^\circ$ K 0,9 mA

Damit wird:

$$j = \frac{0,00105 \text{ Amp.}}{0,00282 \text{ cm}^2} = 0,373 \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$$

$$= 1,12 \cdot 10^9 \frac{\text{elst. Einh.}}{\text{cm}^2}$$

und

$$N = \frac{1,12 \cdot 10^9}{4,77 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{1,37 \cdot 10^{-10} \cdot 35000}{2 \pi \cdot 9,04 \cdot 10^{-28}}}}$$

$$= 0,81 \cdot 10^{11}$$

$$j = \frac{0,0009 \text{ Amp.}}{0,00282 \text{ cm}} = 0,32 \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$$

$$= 0,96 \cdot 10^9 \frac{\text{elst. Einh.}}{\text{cm}^2}$$

$$N = \frac{0,96 \cdot 10^9}{4,77 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{1,37 \cdot 10^{-10} \cdot 15000}{2 \pi \cdot 9,04 \cdot 10^{-28}}}}$$

$$= 1,06 \cdot 10^{11}$$

also  $N \approx 10^{11}$  für rein Neon und Neon + viel Hg. Mit  $N = 10^{11}$ ,  $T_e = 15000^\circ$  K (Neon + viel Hg) wird

$$S = 1,8 \cdot 10^3 \frac{(T_e)^2}{N} = 1,8 \cdot 10^3 \frac{(1,5)^2 \cdot 10^8}{10^{11}} = 4 \text{ cm.}$$

Neben diesem elektrostatischen Mechanismus bewirken noch andere Faktoren (z. B. die *elastischen* Zusammenstöße mit den Gasatomen) die Einstellung der Maxwell'schen Verteilung, so daß erfahrungsgemäß die Relaxationsstrecken etwa halb so groß gefunden werden als die obige Rechnung ergibt<sup>1)</sup>.

Damit würde

$S \approx 2$  cm in der Hg-Entladung

1) Vgl. v. Engel-Steenbeck, a. a. O., S. 23.

und wir erwarten den Umschlag, sobald die freie Weglänge  $\lambda > 2 \text{ cm}$  wird<sup>1)</sup>.

Der Wirkungshalbmesser des Hg für Elektronen von  $\sim 10 \text{ eV}$  Geschwindigkeit ist nach Ramsauer:

$$\varrho = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \text{ (fällt mit wachsenden eV nur mehr wenig)}$$

oder

$$\varrho^2 \pi = 1,96 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2;$$

nach Brode-Bleakney:

$$\varrho = 12 \cdot 10^{-8} \text{ cm für Ionisierung allein,}$$

$$\varrho = 22 \cdot 10^{-8} \text{ cm für „Streuung“,}$$

$$\varrho^2 \pi = \begin{cases} 1,44 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \\ 4,84 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \end{cases}.$$

Für  $\lambda = 2 \text{ cm}$  ist  $Z \varrho^2 \pi = 0,5 \text{ cm}^2$ , wenn  $Z$  die Zahl der Atome pro  $\text{cm}^3$  bedeutet. Nach Ramsauer erhalten wir damit

$$Z = \frac{0,5}{1,96 \cdot 10^{-15}} = 2,55 \cdot 10^{14} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}.$$

Bei  $p = 1 \text{ mm}$  haben wir  $3,56 \cdot 10^{16} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}$  also ist der Umschlagsdruck  $p = 1 \text{ mm} \cdot \frac{2,55 \cdot 10^{14}}{3,56 \cdot 10^{16}} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$ . Nach Brode (mit  $\varrho$ -Ionisierung)

$$Z = \frac{0,5}{1,44 \cdot 10^{-14}} = 3,5 \cdot 10^{13} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}$$

und

$$p = \frac{3,5 \cdot 10^{13}}{3,56 \cdot 10^{16}} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}.$$

Wir beobachten den Umschlag an Sonde 2 bei einem Hg-Druck von  $5 \cdot 10^{-3}$  (Maximum) —  $1,10^{-2}$  (rein Hg), aus der Temperatur des Hg-Vorrats berechnet. Wegen der kleineren Dichte im Versuchsröhr würden wir damit einen (auf  $0^\circ \text{C}$  bezogenen) Hg-Druck im Rohr von  $3,3 \cdot 10^{-3} \text{ (max)}$  bis  $6,6 \cdot 10^{-3} \text{ (rein Hg)}$  mm Hg haben.

Wir kommen also mit der Abschätzung des Umschlagdrucks in den Bereich, in dem der Umschlag tatsächlich beobachtet wird.

1) Genau genommen dürften wir nicht einfach die „freie Weglänge“, sondern nur die „freie Weglänge für unelastische Stöße“ für unsere Überlegung verwenden. Die Unterscheidung ist aber praktisch sinnlos, da der Wirkungsquerschnitt nach Brode-Bleakney für Ionisierung allein bereits größer ist als der gesamte Wirkungsquerschnitt nach Ramsauer, also gar nicht mehr als die Größenordnung berechnet werden kann.

## § 11a. Erklärung der Stromabhängigkeit

Die optischen Beobachtungen und die Messung des Gradienten hatten gezeigt, daß der Umschlag durch eine höhere Entladungsstromstärke nach höheren Quecksilberdampfdrucken verschoben wurde. Um zu erkennen, wie dieser Effekt sich auf die Elektronentemperatur und die Verteilungskurve auswirkt, wurde ein Quecksilberdampfdruck eingestellt, bei dem das Rohr mit 25 mA etwa zur Hälfte blau, zur Hälfte rot brannte, so daß Sonde 2 eben im Bereich des „Umschlags“ stand. Bei einer Erhöhung der Stromstärke auf 40 mA wurde dann an Sonde 2 die Sondenkurve der Fig. 21 erhalten, das Rohr leuchtete durchwegs rein rot. Erniedrigung des Stromes auf 15 mA gab die Kurve der Fig. 22, das Rohr

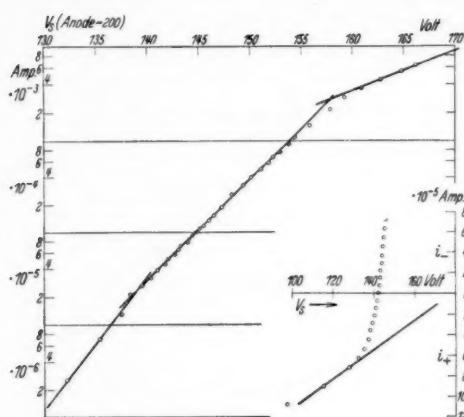


Fig. 21. SK. 71; Neon + Hg,  
 $p_{\text{Hg}} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$ ;  $i = 40 \text{ mA}$

brennt rein blau. In Tab. 1 sind die Elektronentemperaturen für die 3 Sonden bei 15 und 40 mA Entladungsstrom verglichen mit Mittelwerten der Elektronentemperatur bei 25 mA. Während die Elektronentemperatur bei 15 und 25 mA von etwa derselben Größe sind, steigen sie bei 40 mA sogar über die Werte, die mit 25 mA bei Steigerung des Quecksilberdrucks im *Maximum* gefunden wurden. (Die Werte für Sonde 3 sind durchwegs niedriger wegen des dort höheren Hg-Drucks). Der Typus der Kurven ist bei 15 mA ganz ähnlich den Kurven, die bei 25 mA in rein blauen Entladungen erhalten wurden: die Abweichungen von der MVK. beginnen bei  $\sim 7$  Volt (Sonde 1  $\sim 10$  Volt). Bei 40 mA dagegen erhalten wir

Tabelle 1

$$T_e; p_{\text{Hg}} = 7 \cdot 10^{-3}$$

	Sonde 1	Sonde 2	Sonde 3
15 mA	2,16	2,24	1,52
25 mA	(1,8)	- 2,3	1,6
40 mA	4,0	3,9	3,02

Kurven, die ohne Abweichung bis zu hohen Gegenspannungen geradlinig verlaufen und erst über 20 Volt Abweichungen von der MVK. andeuten.

Es wäre möglich, auch für diesen „Umschlag“ die Entmischung allein verantwortlich zu machen, die bei 40 mA natürlich stärker

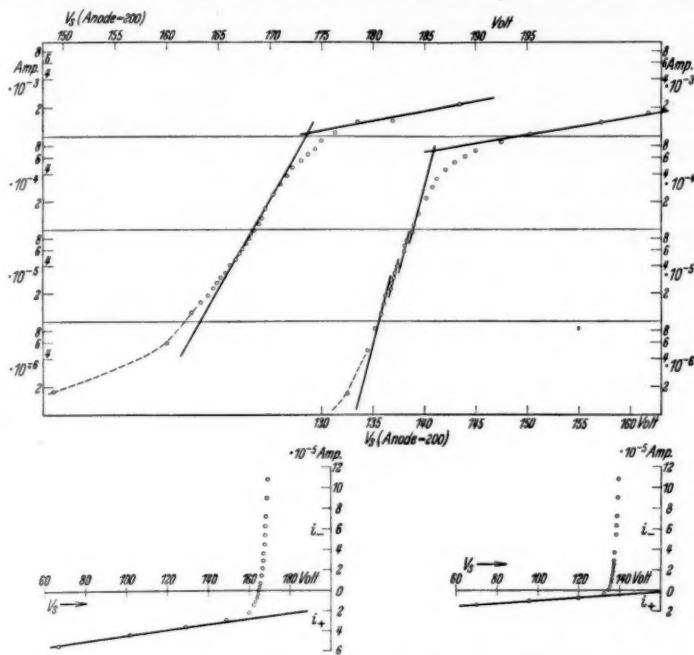


Fig. 22. (links): SK. 78; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 7,5 \cdot 10^{-3}$  mm Hg  
(rechts): SK. 69; Neon + Hg,  $p_{\text{Hg}} = 8 \cdot 10^{-3}$  mm Hg.  $i = 15$  mA

sein muß als bei 15 oder 25 mA. Ich halte jedoch diese Erklärung allein aus folgenden Gründen nicht für ausreichend:

1. Die Beobachtung, daß die Intensität der Quecksilberlinien über den Umschlagsbereich ohne Sprung ganz stetig abnimmt, zeigt, daß das Quecksilber nicht etwa plötzlich weggeschafft wird, sondern die Quecksilberdampfdichte im Rohr mit sinkender Temperatur des Quecksilbervorrats allmählich sinkt.

2. Die Sondenkurven, die bei 25 mA aufgenommen wurden, zeigen bei den annähernd (nicht ganz) gleich hohen Elektronentemperaturen, die im Maximum der Fig. 11 erreicht werden, noch starke Abweichungen durch das beigemischte Quecksilber. Wenn

wir bei  $40 \text{ mA}$  wegen der Entmischung etwa die Quecksilberdichten entsprechend diesem Maximum annehmen würden, sollten die Sondenkurven bei  $40 \text{ mA}$  ähnliche Abweichungen zeigen, was nicht der Fall ist. Wenn die Hg-Dichte jedoch *noch* kleiner angenommen wird, ist es unverständlich, daß die Elektronentemperatur sogar höher als im Maximum sein sollte<sup>1)</sup>.

Nun ist aber die Relaxationsstrecke  $S$  nach

$$S = 1,8 \cdot 10^3 \cdot \frac{T_e^2}{N}$$

verkehrt proportional der Ionenkonzentration  $N$ . Da diese mit zunehmendem Entladungsstrom größer wird, muß  $S$  mit dem Strom kleiner werden: wir müssen deshalb nach den Überlegungen des § 10 den Farbumschlag bei *kleineren* freien Weglängen im Quecksilber, also höheren Quecksilberdrucken erwarten.

Die Bestimmung von  $N$  liefert bei  $40 \text{ mA}$  als Mittel der 3 Sondenmessungen  $N = 2,2 \cdot 10^{11}$  also gut das doppelte des für  $25 \text{ mA}$  berechneten Wertes, obwohl der Strom nicht ganz verdoppelt wurde. Damit wird  $S$  etwa halb so groß<sup>2)</sup> und der Umschlagsdruck doppelt so hoch. Da wir mit  $25 \text{ mA}$  gerade auf den kritischen Druck eingestellt hatten, sind wir also mit  $40 \text{ mA}$  unterhalb des Umschlagsdrucks — die Entladung brennt *rot*. Die Relaxationsstrecke ist kleiner als die freie Weglänge im Quecksilber — die MVK. kann sich ungestört ausbilden, *obwohl* Quecksilber in merklicher Dichte vorhanden ist. Aber wenn wir dieses auch an Abweichungen von der MVK. nicht bemerken können, weil die MVK. sich nach unelastischen Zusammenstößen mit Hg-Atomen zu schnell wieder einstellt, so merken wir doch, daß es als Energieverbraucher vorhanden ist: *Die Elektronentemperatur wird erhöht*. Daß sie sogar höher ist als im Maximum bei  $25 \text{ mA}$ , läßt vermuten, daß auch die Hg-Dichte höher ist als an diesem Punkt.

#### § 11 b. Versuch einer Bestimmung der Masse der Ionen

Nicht nur der Farbumschlag selbst, sondern auch die Beobachtungen, die wir bei einer Änderung der Entladungsstromstärke optisch sowie an den Sondenkurven machen, können also zwangslös erklärt werden, wenn wir nicht die Änderung der Quecksilberdichte durch die Entmischung, sondern das Verhältnis von Relaxations-

1) Nach der Schottkyschen Theorie ist die Elektronentemperatur in erster Näherung vom Strom unabhängig, in zweiter Näherung sinkt  $T_e$  mit zunehmendem Strom durch kumulative Effekte.

2) Für  $T_e$  ist als Ausgangswert wieder die Elektronentemperatur in der Hg-Entladung einzusetzen.

strecke zu freier Weglänge als wesentlich für die Erscheinungen ansehen. Eine Stütze dieser Anschauung sahen wir oben in der Tatsache, daß sich das Quecksilber optisch um den Umschlag gar nicht kümmert, die Intensitäten des Triplets z. B. über den Umschlag weg mit sinkendem Hg-Dampfdruck stetig abnehmen. Nun ist oberhalb des Umschlags sicher das Quecksilber allein Träger der Entladung, zur Ionisierung des Neons besteht keine Möglichkeit. Es wäre interessant, festzustellen, ob das Quecksilber auch über den Umschlag weg Träger der Entladung bleibt, bzw. bei welchen Quecksilberdrucken die Ionisation des Hg nicht mehr ausreicht und das *Neon* die Ionen der Entladung liefern muß<sup>1)</sup>. Dazu ist es nötig, wenigstens *relativ* die Massen der Ionen zu kennen, welche den Ionenstrom bilden. Eine Möglichkeit dazu gibt uns die Auswertung der Sondencharakteristiken nach folgenden Überlegungen:

1. Für die Elektronen- wie die Ionendichte  $j$  gilt, jeweils mit dem entsprechenden Vorzeichen:

$$j^\pm = e \cdot N^\pm \cdot \sqrt{\frac{k T^\pm}{2 \pi m^\pm}}$$

( $j$  = Stromdichte;  $N$  = Trägerkonzentration;  $T$  = Elektronen- bzw. Ionentemperatur;  $m$  = Masse der Elektronen bzw. Ionen;  $e$  = Elementarladung).

Mit

$$N^+ = N^- = N$$

wird

$$\frac{m^+}{m^-} = \left(\frac{j^+}{j^-}\right)^2 \cdot \frac{T^+}{T^-}$$

oder das „Atomgewicht des Ions“

$$A_{\text{Ion}} = A_{\text{Elektron}} \cdot \left(\frac{j^-}{j^+}\right)^2 \cdot \frac{T^+}{T^-} \quad (A_{\text{Elektron}} = 5,04 \cdot 10^{-4}).$$

Zur Berechnung von  $j^-$  ist der Elektronenstrom am „Raumpotential“ zu nehmen, für  $j^+$  der bis zu derselben Sondenspannung extrapolierte Wert des Ionenstroms; weil an diesem Punkt keine Raumladungsschicht um die Sonde liegt, ist die auffangende Fläche für beide Ströme gleich der Sondenoberfläche, so daß wir

$$\frac{j^-}{j^+} = \left(\frac{i^-}{i^+}\right)_{V_S} = V_{\text{R.-Pot.}}$$

1) Darüber konnten wir bisher nichts sagen, weil den Sondenkurven nicht anzusehen ist, ob die hohe Elektronentemperatur nur zum Ausgleich kleinerer Ionisierungswahrscheinlichkeit des Hg nötig ist, oder schnelle Elektronen zur Ionisation des Neons schaffen muß. Außerdem besteht mit der Anregung metastabiler Terme auch die Möglichkeit einer Ionisierung des Neons aus dem metastabilen Zustand.

setzen dürfen und damit das „Atomgewicht“ der Ionen bis auf den Faktor  $T^+/T^-$  ausrechnen können. Mit der Annahme, daß dieser Faktor über den Umschlag weg konstant bleibt, müßten die so berechneten „Atomgewichte“ der Ionen für eine Neonentladung  $\frac{201}{20,2} \cong 10$  mal kleiner sein als für die Entladung bei hohen Hg-Drucken, die sicher nur von Hg-Ionen getragen wird.

2. Eine andere Ausrechnung derselben Größe ermöglicht die folgende Formel:

$$\frac{m^+ \cdot T^-}{m^- \cdot T^+} = e^{\frac{2eV_{\text{isol.}}}{kT^-} 1)$$

( $e$  = Basis der nat. Logarithmen).

„ $V_{\text{isol.}}$ “ ist die Spannung, auf die eine isolierte Sonde sich gegen das Plasma aufladen würde. Sie läßt sich aus den Sondenkurven entnehmen, als Differenz der Sondenspannung, für die der Sondenstrom = 0 ist, und des Raumpotentials.

Mit

$$e \cdot \Delta V_s = kT_e$$

( $\Delta V_s$  = Differenz der Sondenspannung für die der Sondenstrom auf das  $e$  fache steigt), erhält man

$$A_{\text{Ion}} = A_{\text{Elektron}} \cdot \frac{T^+}{T^-} \cdot e^{\frac{2eV_{\text{isol.}}}{\Delta V_s}}.$$

Die Auswertung der Sondenkurven nach obigen Formeln ist an sich sehr bedenklich. Erstens ist der Ionenstrom  $i^+$ , welcher quadratisch in die Formeln eingeht, sehr klein gegen den Elektronenstrom und wird erst durch eine Extrapolation gewonnen. Außerdem ist er sehr empfindlich von Verunreinigungen des Gases abhängig, vielleicht auch von Faktoren bestimmt, welche noch nicht klar erkannt sind. Gewöhnlich wird die Formel (1) benutzt, um mit bekanntem  $m^+$ <sup>2)</sup> Werte für  $T^+$  auszurechnen. Diese Werte werden

1) Die Sonde lädt sich gegen das Plasma so hoch negativ auf, daß der Strom der schnellen Elektronen, welche gegen diese Sondenspannung noch anlaufen können, gerade gleich wird dem gesamten Ionenstrom (der von dieser negativen Sonde angezogen wird):

$$\frac{1}{4} \cdot N^+ \cdot e \cdot \sqrt{\frac{kT^+}{2\pi m^+}} = \frac{1}{4} \cdot N^- \cdot e \cdot \sqrt{\frac{kT^-}{2\pi m^-}} \cdot e^{\frac{-eV_{\text{isol.}}}{kT^-}},$$

$N^+ = N^-$  gibt:

$$\sqrt{\frac{kT^+}{2\pi m^+}} = \sqrt{\frac{kT^-}{2\pi m^-}} \cdot e^{\frac{-eV_{\text{isol.}}}{kT^-}} \quad \text{oder} \quad \frac{T^+}{m^+} = \frac{T^-}{m^-} \cdot e^{\frac{-2eV_{\text{isol.}}}{kT^-}}.$$

2) Wenn kein Gasgemisch vorliegt, ist  $m^+$  gleich dem Atomgewicht des benutzten Gases.

meist unverständlich *hoch*; es sieht also so aus, als würde der Ionenstrom ganz wesentlich zu *groß* gemessen. Dieses Verhalten wurde bereits mehrfach diskutiert, sehr ausführlich z. B. von Kömnick<sup>1)</sup>. Wenn auch die Erklärung durch negative Ionen (elektronenaffine Verunreinigungen) sehr plausibel erscheint, möchte ich doch noch auf eine weitere Möglichkeit hinweisen, die in diesem Zusammenhang bisher noch nicht diskutiert wurde: bei der Berechnung der „ambipolaren Diffusion“ wird davon Gebrauch gemacht, daß bei der hohen Leitfähigkeit des Plasmas größere Raumladungen sich nicht halten können, also stets *annähernd*  $n^+ = n^-$  ist. Gleichzeitig mußten wir aber zum Funktionieren der ambipolaren Diffusion annehmen, daß die Elektronen gegen die Ionen voraus-eilen und so eine ionenbeschleunigende *negative* Raumladung in der Nähe der Wand und eine negative Wandladung schaffen. Damit die Säule im ganzen neutral bleibt, muß also in der Achse des Rohres eine positive Raumladung entstehen, welche die *negative* Ladung der Wand und in Wandnähe kompensiert. Dabei erfordert jedes an der Wand sitzende Elektron 1 Ion zur Kompensation (ebenso wie jedes schwere negative Ion), während im Volumen z. B. 1 Hg-Ion rund 600 im Verhältnis  $\sqrt{\frac{m^+}{m^-}}$  schnellere Elektronen kompensieren kann. Die Sondenmessung muß also auch aus diesen Gründen in der Rohrachse größere Ionenströme liefern, als für das neutrale Plasma zu erwarten sind.

Wir dürfen deshalb nicht erwarten, den richtigen Wert für das „Atomgewicht des Ions“ zu erhalten und müssen uns damit abfinden, daß die gefundenen Werte stark streuen. Dennoch war zu hoffen, daß Neon und Quecksilber unterschieden werden können, da die Massen sich wie 1:10 verhalten, also um eine ganze Größenordnung unterscheiden.

In Fig. 23 habe ich für die Sonde 3 die Werte  $A_{\text{Ion}} \cdot \frac{T^+}{T^-}$  in Abhängigkeit vom Quecksilberdruck eingetragen, in Fig. 24 mit den Elektronentemperaturen zusammengestellt. Die Farbe der Entladung ist besonders gekennzeichnet. Sonde 1 zeigt ein ähnliches Bild, Sonde 2 ist unübersichtlich, weil sie meist im Umschlagsgebiet stand, und in diesem die Werte ineinander übergehen.

Trotz der großen Streuung ist doch zu erkennen, daß die Werte für kleine Hg-Drucke, bzw. *rote* Entladung sich um die *Einer* anordnen, während die Werte für höhere Hg-Drucke (blaue Entladung) um 10 streuen. Der Wert für  $A_{\text{Ion}}$  wäre selbst für  $T^+ = T^-$

1) J. Kömnick, Ann. d. Phys. [5] 15. S. 273. 1932.

ungefähr 20 mal zu klein; dagegen unterscheiden sich die  $A_{\text{ion}}$  für „rote“ und „blaue“ Entladung bei 25 mA Entladungsstrom um an nähernd eine Größenordnung: mit sinkendem Hg-Druck ist das

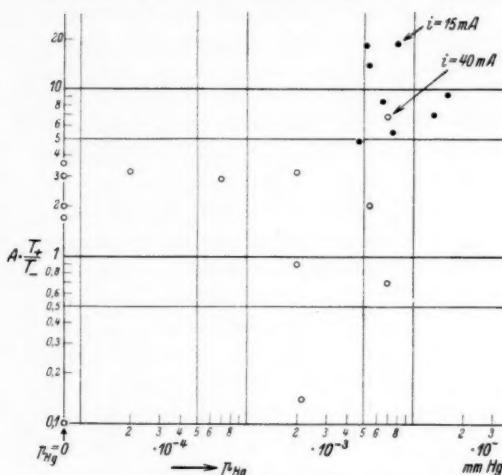


Fig. 23. „Atomgewicht“ der Ionen in Abhängigkeit vom Quecksilberdampfdruck. ○ rote Entladung, ● blaue Entladung

tronentemperatur verdeutlicht dies noch einmal. Wir sehen eine Gruppe: rote Entladung, hohe Elektronentemperatur, leichte Ionen;

eine zweite: blaue Entladung, niedrige Elektronentemperatur, schwere Ionen. Allein der Punkt für 40 mA fällt heraus: wir haben für diese *rote* Entladung *hohe* Elektronentemperatur und *schwere* Ionen.

Wir können die Beobachtungen so zusammenfassen: bei einem Entladungsstrom von 25 mA erfolgt der Farbumschlag bei so tiefen Drucken, daß *unterhalb* des Umschlags die Ionisierung des Quecksilbers nicht mehr ausreicht, und daher

Fig. 24. Elektronentemperatur ( $\sim \Delta V_s$ ) und „Atomgewicht“ der Ionen. ○ rote, ● blaue Entladung

das Neon die Entladung tragen muß. Der Unterschied in den Ionenmassen ist trotz der großen Streuung der Werte zu erkennen.

Neon Träger der Entladung geworden. Bei dem durch 40 mA Entladungsstrom erzwungenen Umschlag dagegen finden wir auch für diese *rote* Entladung „schwere Ionen“: das Quecksilber ist in diesem Fall, weil seine Dichte noch ausreichend hoch ist, Träger der Entladung geblieben, der Farbumschlag hat sich nur in der Elektronentemperatur bemerkbar gemacht.

Die Zusammenstellung mit der Elek-

Wird durch höheren Strom (größeres  $N$ ) der Umschlag schon bei höheren Drucken erzwungen, dann bleibt das Quecksilber der wesentliche Träger des Stromes<sup>1)</sup>.

Unsere Vermutung, daß das Quecksilber auch in einer roten Säule Träger der Entladung sein kann, ist durch die Versuche jedenfalls nicht widerlegt, durch die Messung der  $A_{\text{Ion}}$  wahrscheinlich gemacht. Die Quecksilberdichte scheint bei der durch höheren Strom erzwungenen roten Entladung tatsächlich höher zu sein als im Umschlagsmaximum bei 25 mA, da sie zur Ionisierung des Hg ausreicht (vgl. S. 446), während dies unterhalb des Umschlagsdrucks für 25 mA nicht mehr der Fall ist.

Die Anregung des Quecksilbers erfolgt noch bei so kleinen Hg-Dichten, bei denen von der Ionisierung desselben nichts mehr bemerkt werden kann. Das bedeutet, daß wenigstens unterhalb des Umschlagsdrucks die Anregung des Hg mit größerer Ausbeute erfolgt als die Ionisierung, bzw., daß bei den hier vorliegenden Verhältnissen der positiven Säule die Zahl der anregenden Stöße größer ist als die Zahl der ionisierenden<sup>2)</sup>. Es ist also sicher nicht erlaubt, bei der Berechnung der Elektronentemperatur für Neon-Hg-Gemische die Anregung neben der Ionisierung zu vernachlässigen.

#### § 12. Vergleich von Argon und Neon

Der Vergleich von Rohren, welche Neon, mit solchen, welche Argon als Grundgas enthalten, zeigt spektroskopisch folgende Unterschiede:

1. Argon-Hg-Röhren zeigen keinen „Umschlag“ der Farbe. Bei sinkendem Hg-Druck kommen mit allmählich steigender Intensität Argonlinien<sup>3)</sup> heraus, und zwar schon bei Drucken, die höher sind als der Umschlagsdruck in Neon. Der Gradient zeigt ebenfalls keinen steilen Anstieg und auch kein Maximum, sondern steigt mit sinkendem Hg-Druck flach an. (Vgl. Fig. 1.)

1) Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß auch das Neon mit einem Bruchteil am Ionenstrom beteiligt ist. Die Messung der  $A_{\text{Ion}}$  ist nicht genau genug, eine solche Beteiligung des Neons etwa prozentual anzugeben. Wir können nur sagen, daß im wesentlichen schwere Ionen den Ionenstrom bilden.

2) Vgl. S. 446. Für reines Neon wurde das Verhältnis anregende Stoße/ionisierende Stoße in Abhängigkeit von  $E/p$  (Feldstärke: Druck) von J. S. Townsend u. S. J. Mc Callum [Proc. Roy. Soc. (A). **124**, S. 533, 1929] und von F. M. Penning u. M. C. Teves (Physica **9**, S. 97, 1929) untersucht.

Für unsere Versuchsbedingungen ( $\frac{E}{p} \approx 0,5$ ) sind danach in reinem Neon  $> 30$  anregende auf einen ionisierenden Stoß zu erwarten. (S. v. Engel-Steenbeck, a. a. O., Bd. I, S. 140.)

3) Blaue Linien des „roten“ Argonspektrums.

2. Die *Hg-Triplettlinien* sind bei gleicher Entladungsstromstärke im Argon-Hg-Rohr gegenüber dem Neon-Hg-Rohr deutlich schwächer.

Einzelne Linien und Liniengruppen (die roten Hg-Linien — Singulettlinien und höhere Glieder der Triplettsérie —, sowie 4916, und 4108) sind im Argonrohr *wesentlich* schwächer als im Neonrohr. (Dieser Unterschied wird mit abnehmendem Hg-Druck deutlicher.)

Der unter 2. genannte Unterschied ist ohne weiteres aus der Höhe der Anregungsspannungen und der Anregungsfunktion zu verstehen:

Die Anregungsfunktion des Hg-Triplets hat ein scharfes Maximum zwischen 9 und 10 Volt, die Anregung erfolgt also wesentlich durch Elektronen von Geschwindigkeiten von 9 bis einige Volt über 10 Volt. Wir haben gesehen, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in diesem Gebiet durch *Neon* überhaupt nicht beeinflußt wird: die kleinste Anregungsspannung des Argons dagegen liegt schon bei 11,5 Volt, also in einem Geschwindigkeitsbereich, der für die Anregung des Hg-Triplets noch recht wichtig ist: da das Argon, wenn auch mit kleiner Ausbeute, Elektronen dieses Bereiches verbraucht, muß die Intensität des Hg-Triplets in dem Maß abnehmen, als auch bei hohem Hg-Druck das Argon angeregt wird. Der Unterschied ist nicht sehr groß, weil zur Anregung des Hg-Triplets sehr wesentlich Elektronen beitragen, deren Geschwindigkeit *kleiner* ist als 11,5 Volt. Er wird wesentlich stärker für Linien, deren Anregungsmaximum bei höheren Geschwindigkeiten liegt, weil die Ausbeute der Argonanregung mit steigender Voltgeschwindigkeit zunimmt und damit Elektronen verbraucht werden, die zur Anregung solcher Linien gerade wesentlich wären. Deshalb ist der Unterschied für Singulettlinien sowie für höhere Glieder von Triplettsérén wesentlich größer als für das Hg-Triplett (5461 — 4358 — 4046). Das sind aber gerade die Linien, die im Argon-Hg-Rohr *wesentlich* schwächer gefunden wurden als im Neon-Hg-Rohr!

Dagegen ist zunächst nicht einzusehen, warum im Argon-Hg-Rohr nicht ebenfalls ein „Umschlag“ erfolgen soll; dieser müßte sogar bei *höheren* Hg-Drucken erfolgen, weil die Anregungsspannungen im Argon niedriger sind als im Neon. Irgendeine sprunghafte Änderung der Argonintensitäten wurde jedoch im Argon-Hg-Rohr *nicht* beobachtet.

Die Erklärung dafür folgt aus Messungen der Stoßausbeuten als Funktion der Elektronengeschwindigkeit. Diese wurden von Maier-Leibnitz<sup>1)</sup> gemessen, dessen Beobachtungen in Fig. 23 wieder-

1) H. Maier-Leibnitz, Ztschr. f. Phys. 95, S. 499. 1935. Aus der Höhe der Stufen in Gegenspannungskurven hat H. Löhner [Ann. d. Phys. (5) 22, S. 81. 1936] Anregungsausbeuten in Edelgasen bestimmt. Er findet für

gegeben sind. Wir sehen daraus, daß im Neon die Anregung der metastabilen sowie der höheren optischen Terme (16,6 und 18,5 e-Volt) nach Überschreiten der kritischen Spannungen sprunghaft mit großen Ausbeuten erfolgt während die Ausbeute für die Argonterme ganz allmählich mit steigender Spannung zunimmt<sup>1)</sup>. Ob wir also für den Umschlag im Neon-Hg-Rohr, für die sprunghafte Änderung in Farbe, Gradient und Elektronentemperaturen, den plötzlichen Anstieg der Neonausbeuten allein verantwortlich machen, oder den Mechanismus mit den metastabilen Atomen zur Erklärung mit heranziehen: wir haben in *keinem* Fall für das Argon eine ähnliche sprunghafte Änderung zu erwarten, weil im Argon die Anregung der metastabilen sowie der maßgeblichen optischen Niveaus nicht mit einem scharfen Ausbeutemaximum einsetzt.

Wir verstehen also aus der *Lage der Anregungsspannungen*, daß die Argonlinien schon bei *höheren* Dampfdrücken angeregt werden als die Neonlinien (blaue Ar-Linien schon in einem Wasserbad von 20° C)<sup>2)</sup> und wir verstehen aus der *Gestalt der Ausbeutfunktionen*, daß *Neon sprunghaft, Argon dagegen stetig ansteigend* herauskommt<sup>3)</sup>, und zwar viel schwächer als Ne, weil zu seiner Anregung *hohe* Elektronengeschwindigkeiten wesentlich sind, während die MVK. nach hohen Geschwindigkeiten stark abfällt. In diesem Zusammenhang muß auch ein bemerkenswerter Unterschied im Verhalten der metastabilen Terme des Neons bzw. Argons erwähnt werden: während im Ne die metastabilen Zustände ohne Schwierigkeit zu erhalten

---

He 18,1%, Ne 15,9%, Ar 4,2% bei Elektronengeschwindigkeiten von 22 bzw. 20,7 und 14,75 Volt, also jeweils knapp unter der Ionisierungsspannung. Die Messungen Löhners sind jedoch für uns nicht so aufschlußreich, weil sie nur bei je einer einzigen Spannung ausgeführt sind. Ferner hat O. Hermann [Ann. d. Phys. (5) 25, S. 143. 1936; vgl. dort auch Literatur über Anregungsfunktionen] Anregungsfunktionen und Ausbeuten für Argon und Neon gemessen, doch sind dessen Ergebnisse für uns nicht brauchbar, weil sie wesentlich höhere Elektronengeschwindigkeiten betreffen als in der positiven Säule vorkommen.

1) Die dargestellten Kurven von Maier-Leibnitz sind Integralkurven: wenn man sie differenziert, um die Ausbeutfunktionen zu isolieren, erhält man für Neon steile Maxima knapp über der Anregungsspannung, während für Argon nur ein allmählicher Anstieg beobachtet werden kann.

2) Vgl. W. Gerlach u. K. Siebertz, Ztschr. f. Phys. 91, S. 39. 1934.

3) Die Anregungsfunktionen des He sind nach Maier-Leibnitz denen des Ne ganz ähnlich, danach ist für He ein ähnlicher Farbumschlag zu erwarten wie bei Ne. Das ist auch tatsächlich der Fall, He-Hg-Röhren schlagen bei Abkühlung, ähnlich plötzlich wie bei Ne-Hg, von blau nach gelb um. Doch sind die Verhältnisse offenbar nicht ganz identisch mit denen der Ne-Hg-Röhren, z. B. wird beim Umschlag der Heliumröhren das Quecksilberspektrum stark geschwächt.

sind, findet man sie im Ar nach Dorgelo und Washington<sup>1)</sup> nur bei ganz besonders sorgfältiger Reinigung des Gases. Danach wäre zu erwarten, daß in unseren Gasgemischen die metastabilen Ar-Niveaus gar nicht existenzfähig sind. Es ist aber auch möglich, daß die Erklärung dieser Beobachtungen von Dorgelo sich aus den mitgeteilten Vorstellungen selbst geben läßt: daß nämlich zur merklichen Anregung der metastabilen Ar-Terme hohe Elektronengeschwindigkeiten erforderlich sind, deren Ausbildung durch Verunreinigungen unterbunden wird. Jedenfalls weist auch die Beobachtung von Dorgelo und Washington darauf hin, daß wir im Fall des Ar keinem Umschlagsmechanismus über die metastabilen Atome erwarten dürfen.

H. Schober (Ztschr. f. techn. Phys. 16, S. 71. 1935) beobachtet bei wesentlich tieferen Temperaturen ( $-20^{\circ}$  bis  $-60^{\circ}$  C) auch in Röhren mit reinem Argon als Grundgas einen allerdings sehr verwaschenen Übergang zu einer roten Entladung, während wir nur *blaue* Linien des roten Ar-Spektrums beobachten. Das ist so zu erklären:

Die *rote* Liniengruppe des roten Ar-Spektrums hat, wie die entsprechende des Neons, eine Anregungsfunktion mit steilem Maximum knapp über der Anregungsspannung. Sie wird jedoch erst angeregt, wenn auch alle Spuren des Hg ausgefroren sind, weil die Triplettanregung des Hg und die Anregung der roten Ar-Linien sich zu sehr überdecken und die Ausbeute für das Ar außerordentlich klein gegenüber dem Hg ist. Der „Umschlag“ erstreckt sich über einen weiten Temperaturbereich, weil das Ar nur in dem Maß herauskommt, wie das Hg verschwindet, und die Voraussetzungen für den „Umschlagsmechanismus“ nicht gegeben sind.

Ein weiterer Unterschied der Ne-Hg- gegenüber der Ar-Hg-Röhren war in unserer ersten Arbeit nicht erwähnt worden: daß nämlich das Quecksilberleuchten in normal brennenden Lampen (hohe Temperatur, wesentlich nur Hg-Spektrum) den Querschnitt der Neon-Hg-Röhre besser ausfüllt als den der Ar-Hg-Röhre. Auch diese Erscheinung läßt sich dadurch erklären, daß die *schnellsten* Elektronen, welche im Neonrohr bei hohen Hg-Drucken noch vorkommen, im Ar-Rohr vom Argon absorbiert werden. Die *schnellsten* Elektronen sind es aber, welche gegen die Wand anlaufen und trotz der Abbremsung durch Wandladung und Quergradienten noch anregen können<sup>2)</sup>. Da diese im Argon fehlen, wird also auch die Anregung des Quecksilbers im Argon radial stärker abnehmen als im Neon.

1) H. B. Dorgelo u. T. P. K. Washington, Proc. Amsterdam 30, S. 33. 1927.

2) Wegen des Abfalls der Ionenkonzentration müssen wir noch erwarten, daß die schnellen Elektronen tatsächlich gegen den Quergradienten „anlaufen“, und nicht in jedem Querschnittselement neu dem Mechanismus Maxwell-scher Verteilung unterliegen.

§ 13. Erklärung des roten Kerns im blauen Mantel

Die einfachste Erklärung der im Wechselstrombetrieb beobachteten Erscheinungen eines roten Kerns in einem blauen Mantel<sup>1)</sup> wäre nach unseren Vorstellungen etwa folgende: hier erscheint *radial*, was im Gleichstromrohr mit von außen gegebenem Hg-Druck längs der Achse beobachtet wird, wenn das Rohr zum Teil blau, zum Teil rot leuchtet. Wir haben im Wechselstromrohr<sup>2)</sup> ein Dichtegefälle des Quecksilbers von der Rohrmitte zur Wand:

1. Weil die Gastemperatur in der Achse des Rohres höher ist als an der Wand,

2. durch eine *radiale* elektrische Entmischung, welche dadurch verstärkt wird, daß die Mitte des Rohres die Temperatur bestimmt, der rote Kern also schnelle Elektronen liefert, die das von der Wand verdampfende Quecksilber mit großer Wahrscheinlichkeit ionisieren.

Aber auf diesen *radialen* Gang von Hg-Dichte und Farbe ist der in § 8 besprochene Mechanismus nicht ohne weiteres übertragbar: wegen der höheren Dichte müßte an sich die Elektronentemperatur an der Wand niedriger sein<sup>3)</sup>, es wären sozusagen zwei Entladungen ineinander geschachtelt<sup>4)</sup>. Da aber die Ionenkonzentration in Wandnähe sicher *klein* ist, dürfen wir gar nicht erwarten,

1) Undeutlich verwaschen und auf kürzere Strecken kann man auch im Gleichstrombetrieb ähnliches beobachten.

2) Flüssiges Hg im Rohr! — An der ganzen Wand ist Hg niedergeschlagen.

3) Im homogenen Gas ist die Elektronentemperatur über den Rohrquerschnitt konstant.

4) Man könnte daran denken, daß der Hg-Dampfmantel wegen der leichten Ionisierbarkeit des Hg einen „geringeren Widerstand“ hat, und dadurch eine Stromverteilung sich ausbildet, so daß die Entladung schlauchartig im Hg-Mantel erfolgt, und die Mitte nur einen „Nebenschluß hohen Widerstandes“, also mit kleiner Stromdichte darstellt. Die Elektronentemperatur wäre dann wesentlich durch den Mantel (hoher Stromdichte) bestimmt. Sie müßte aber, obwohl wir Hg-Dampf größerer Dichte haben, *hoch* sein, weil die Nähe der Wand einen großen Ionenverlust bedingt, ähnlich der Säule in einem sehr engen Rohr. Bei hoher Elektronentemperatur müßte aber der Umschlag nach rot erfolgen, zumal die Hg-Dichte an sich nicht hoch ist. (Die Erscheinung des roten Kerns wird bei *niedriger* Temperatur des Wasserbades der Röhren beobachtet, kurz vor dem vollständigen Umschlag.) Außerdem müßte der Kern nicht rot, sondern vollständig dunkel sein, da die „Mantelentladung“ Gradient und Elektronentemperatur im Rohr bestimmen würde und neben dieser keine *höhere* Elektronentemperatur aufrecht erhalten werden kann, wie sie zur Anregung des Neons nötig wäre. Es müßte deshalb das *ganze* Rohr rot leuchten, oder ein *dunkler* Kern im blauen Mantel sein: aber das ist wieder unmöglich, weil in diesem Fall keine Ursache für ein Dichtegefälle des Quecksilbers vorhanden ist. Die Vorstellung eines solchen „Entladungsschlauches“ ist also in unserem Fall nicht möglich.

daß sich im Hg-Dampfmantel der Mechanismus einer positiven Säule ausbildet. Die Elektronentemperatur wird wesentlich durch den roten Kern bestimmt, also hoch sein; die gegen den Quergradienten (einige Volt) anlaufenden schnellen Elektronen<sup>1)</sup> ( $\approx 18$  Volt) verlieren so viel an Geschwindigkeit, daß sie im Mantel das Hg mit großer Ausbeute anregen, aber nur wenig ionisieren. Der Säulengradient (wahrscheinlich auch die Elektronentemperatur) ist *hoch*, weil für den Kern gerade das Umschlagmaximum erreicht ist, und zur Anregung des Quecksilbers im blauen Mantel Energie verbraucht wird. (Das Verhältnis von Anregung zu Ionisierung des Quecksilbers ist ähnlich wie nach § 8, S. 435 zugunsten der Anregung verschoben.)

Mehr als dieses qualitative Bild läßt sich nicht geben, ohne die Erscheinung mit Sonden genau durchzumessen.

#### § 14. Vergleich mit anderen Arbeiten

Dorgelo, Alting und Boers veröffentlichten vor kurzem eine Arbeit über „Elektronentemperaturen in der positiven Säule in Gemischen von Neon und Argon oder Quecksilber“<sup>2)</sup>. Zur Deutung ihrer Ergebnisse gehen sie aus von der Elektronentemperatur in reinem Neon und Argon, bzw. Neon + viel Hg, und berechnen damit Werte für die Gasgemische in formaler Erweiterung der Schottkyschen Theorie (vgl. S. 433). Ihre Beobachtungen zeigen für das Neon-Hg-Gemisch einen steilen Abfall bei scheinbar sehr hohen Hg-Drucken, sowie die auffallende Erhöhung der Elektronentemperatur durch kleine Hg-Zusätze.

Sie arbeiten, um laufende Schichten zu vermeiden, mit wesentlich größeren Stromdichten als ich. Bei so hohen Strömen spielt die Entmischung eine so große Rolle, daß der Vergleich mit den berechneten Werten unmöglich wird, zumal die Verff. nur mit einer Sonde in der Nähe der Anode messen. Sie versuchen deshalb mit einer Druckabhängigkeit der Entmischung den Steilabfall der Elektronentemperatur bei hohen Hg-Drucken wenigstens qualitativ verständlich zu machen. Die Diskussion der Verff. beschreibt deren Versuche qualitativ wohl zutreffend, doch glaube ich nach meinen Beobachtungen, daß auch bei Ausschaltung der Entmischung ein scharfer Anstieg zu einem Maximum von  $T_e$  bei einem kritischen Hg-Druck erfolgt<sup>3)</sup>, jedenfalls kein kontinuierliches Ansteigen zum

1) Vgl. auch S. 454.

2) Vgl. auch S. 433.

3) Zu beachten ist allerdings, daß bei hohen Strömen  $S$  sehr klein wird, also eine Voraussetzung für den plötzlichen Mechanismus fehlt.

Wert für reines Neon, wenn der Hg-Druck allmählich Null wird. Darum bleibt bei Dorgelo, Alting und Boers das Ansteigen über die Werte für reines Neon ungeklärt, worüber weitere Versuche angekündigt werden.

Abweichungen von der Geradlinigkeit Langmuirscher Sondenkurven beobachtete Druyvesteyn<sup>1)</sup> in Neon-Niedervoltbögen, welche durch (aus Oxydkathoden verdampftes) Barium verunreinigt sind. Er deutet sie nach dem Schema unserer Fig. 13b, und belegt diese Deutung durch eine genaue Analyse der Sondencharakteristiken. Unvollständig ausgebildete MVK. berechnete Druyvesteyn<sup>2)</sup> für reines Neon und sehr kleine Stromdichten und bestätigte die Rechnung durch Sondenkurven, ähnlich den hier nach Fig. 13c gedeuteten. Die Verhältnisse sind etwas anders als bei uns, da wir mit etwas höherer Stromdichte arbeiteten und damit in „reinem“ Neon vollständig ausgebildete Charakteristiken erhielten, die erst durch Hg-Zusatz gestört werden. Druyvesteyn weist darauf hin, daß in gestörten MVK. auch in dem Teil, der in der  $\ln = i - V$ -Darstellung scheinbar geradlinig ist, keine exakte MVK. vorliegt, so daß die Zuordnung einer „Elektronentemperatur“ nur den Sinn haben kann, die MVK. anzugeben, die der wirklichen Verteilung am ähnlichsten ist. In Übergangskurven zwischen den Typen der Fig. 13b und c z. B. ist diese Zuordnung einer  $T_e$  fast unmöglich.

Kömnick<sup>3)</sup> beobachtete in Quecksilberdampf-Bogenentladungen Abweichungen von der MVK. im Sinn unserer Fig. 13c, die er ebenfalls als Defizit an schnellen Elektronen deutet.

Seeliger und Hirchert<sup>4)</sup> fanden S-förmige Charakteristiken in Edelgasen unter Umständen, welche auf eine Verunreinigung des Gases schließen ließen. Sommermeyer<sup>5)</sup> hat solche S-Kurven nach Druyvesteyn zu analysieren versucht und kam dabei zu der Ansicht, daß schnelle Elektronen in größerer Zahl vorhanden sind als einer MVK. entspricht. Da ihm jedoch die Hypothesen zur Erklärung dieser schnellen Elektronen selbst zu „künstlich“ erschienen, hat er die Versuche wiederholt und gibt in einer späteren Arbeit<sup>6)</sup> an, daß die von Seeliger und Hirchert gefundenen

1) M. J. Druyvesteyn, *Ztschr. f. Phys.* **64**, S. 781. 1930. Im Ne-Na-Gemisch bei hoher Stromstärke auftretende Störungen der Sondenkurven sind anders zu deuten.

2) M. J. Druyvesteyn, *Phys. Ztschr.* **33**, S. 856. 1932.

3) J. Kömnick, *a. a. O.*, S. 449.

4) R. Seeliger u. R. Hirchert, *Ann. d. Phys.* [5] **11**, S. 817. 1931.

5) K. Sommermeyer u. R. Hirchert, *Ann. d. Phys.* [5] **13**, S. 315. 1932.

6) K. Sommermeyer u. R. Hirchert, *Ztschr. f. Phys.* **87**, S. 741. 1934.

*S*-förmigen Charakteristiken nicht mit Störungen der MVK. erklärt werden dürfen, da sie nicht auftreten, wenn die Sondenspannung auf das Anodenpotential bezogen wird, und wenn durch größere Stromdichten das Auftreten laufender Schichten verhindert wird. Demgegenüber muß betont werden, daß bei der Aufnahme der Charakteristiken in Neon mit hohem Hg-Gehalt *S*-förmige Sondenkurven erhalten wurden, obwohl die Spannung auf das Anodenpotential bezogen wurde und keine laufende Schichten auftraten. In unserem Falle sind die *S*-Charakteristiken sicher durch Störung der MVK. zu erklären, allerdings nicht durch einen Überschuß, sondern durch ein Defizit an schnellen Elektronen, welches zwanglos erklärt werden kann. Bei größeren Stromdichten verschwindet diese Störung nach den Überlegungen des § 10.

Uyterhoeven und Verburg<sup>1)</sup> fanden, daß der Gradient eines Ne-Na-Gemisches mit zunehmendem Na-Druck ein sehr steiles Maximum durchläuft. Sie erklären ihre Beobachtung mit jener schlauchartigen Entladung im Na längs der Wand, die für mein Ne-Hg-Gemisch sicher *nicht* möglich ist. Ob meine Erklärung eventuell auch auf die Versuche von Uyterhoeven-Verburg sich übertragen läßt, kann man nicht sagen, da in diesen Versuchen nichts über das Leuchten des Grundgases (Neon) gesagt wird. Außerdem ist wieder zu beachten, daß auch Uyterhoeven und Verburg mit großer Stromstärke arbeiten<sup>2)</sup>.

1) W. Uyterhoeven u. C. Verburg, C. R. **200**. S. 536. 1935.

2) *Ann. b. d. Korr.*: Nach Drucklegung dieser Arbeit habe ich durch frdl. Mitteilung von Herrn Dr. F. M. Penning von zwei weiteren Arbeiten von Uyterhoeven und Verburg Kenntnis erhalten, in denen sie oszillographisch und mit Sonden die Ne-Na-Entladung bei verhältnismäßig hoher Stromdichte untersuchen (W. Uyterhoeven u. C. Verburg, Compt. rend. **201**. S. 647. 1935; **202**. S. 1498. 1936). Daraus geht hervor, daß bei ihren Versuchen die von mir untersuchten Erscheinungen vom Effekt der radiaalen Entmischung vollständig überdeckt sind, ähnlich, wie bei den in den Versuchen von Dorgelo, Alting u. Boers verwendeten Stromstärken die Entladung wesentlich durch die Gasentmischung in der Rohrachse bestimmt ist. Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit scheint mir interessant, daß auch bei den Versuchen von Uyterhoeven u. Verburg die Elektronentemperatur zugleich mit dem Gradienten durch ein scharfes Maximum geht, wobei  $T$ , höher ist als in der Rein-Neon-Entladung, und ferner, daß die Elektronentemperatur in der Rohrachse wesentlich niedriger ist als in Wandnähe (vgl. Ann. S. 455).

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 7. August 1936)

**Zwei leitende, isolierte Kugeln  
im homogenen elektrischen Feld**

**Von Wilhelm Krasny-Ergen**

(Mit 3 Figuren)

**§ 1. Einleitung**

Bei den Untersuchungen über die Wirkung von elektrischen Kurz- und Ultrakurzwellen haben sich verschiedene Effekte gezeigt, die nicht durch Wärmewirkungen erklärt werden konnten. Durch das große Interesse, das man solchen nicht-thermischen („spezifischen“) Effekten der genannten Wellen insbesondere von medizinischer Seite entgegenbrachte, wurde der Verf. angeregt, nach solchen spezifischen Effekten zu suchen. Als ein wichtiger Hinweis auf spezifische Effekte ist eine Untersuchung von Ernst Muth<sup>1)</sup> anzusehen. Bei dieser Untersuchung handelt es sich um Fettröpfchen in verdünnter Milch, oder Teilchen von ausgewaschenem Rahm, Butterfett und Petroleum, welche in Wasser emulgiert waren. Diese Teilchen, die anfangs natürlich ganz ungeordnet waren, treten im Augenblick des Anlegens eines Wechselfeldes zu perl schnurartigen Gebilden zusammen, nach Ausschalten des Feldes stellt sich die ursprüngliche, ungeordnete Verteilung wieder ein. Die „Perlschnüre“ waren parallel zum Feld. Diese Versuche wurden mit Frequenzen von  $2 \cdot 10^4$ — $2 \cdot 10^6$  Hz ausgeführt, es ist jedoch anzunehmen, daß analoge Effekte auch bei höheren Frequenzen auftreten.

Nach Ansicht des Verf.s liegt es nahe, diese Erscheinung durch die elektrischen Kräfte zu erklären, die zwei Körper in einem elektrischen Feld aufeinander ausüben. In erster Näherung wird durch das homogene Feld in jedem Teilchen ein Dipol induziert. Betrachten wir zwei solche Dipole! Die Energie, welche jeder dieser Dipole im Feld des anderen hat, ist negativ, wenn die Verbindungs linie der Dipole parallel zur Dipolrichtung, d. h. Feldrichtung ist, und diese Energie ist positiv, wenn ihre Verbindungs linie normal zu dieser Richtung steht. Da die Energie ein Minimum zu erreichen sucht, haben die Teilchen die Tendenz, sich so zusammenzusetzen, daß ihre Verbindungs linie parallel zur Feldrichtung ist. Es würde

1) Ernst Muth, Koll. Ztschr. 41. S. 97. 1927.

sich nach dieser Erklärung zweifellos um einen nicht-thermischen, spezifischen Effekt handeln.

Bei der obigen Anwendung kommt es darauf an, daß die Teilchen sich bis zur Berührung nähern. Dabei wird aber unsere obige Annahme, daß die Teilchen so wirken wie die vom homogenen Feld in ihnen induzierten Dipole, unzulässig. Denn jedes der Teilchen befindet sich ja in einem Feld, das durch die Anwesenheit des anderen Teilchens inhomogen gemacht wird. Es ist daher durch genaue Rechnung zu überprüfen, ob die obige Erklärung stichhaltig ist. Ferner ist es nötig, zu zeigen, daß die Energie der elektrischen Kräfte, welche die Perl schnüre aufbauen sollen, größer ist, als die Energie der Brownschen Bewegung. Um unsere genaue Rechnung durchführen zu können, nehmen wir zunächst an, daß die Kolloidteilchen Kugeln von gleichem Radius  $a$  seien. Weiter machen wir die Annahme, daß die Teilchen zum mindesten an ihrer Oberfläche eine Leitfähigkeit besitzen, die wesentlich größer ist, als die Leitfähigkeit des umgebenden Mediums. (Letzteres betrachten wir also als isolierend.) Diese Annahme, betreffend die Leitfähigkeit, scheint durch die folgende Überlegung für die meisten Fälle gerechtfertigt. Bekanntlich sind kolloide Teilchen geladen und ziehen daher Ionen aus der umgebenden Flüssigkeit an. Meist entsteht hierdurch in der unmittelbaren Umgebung der Teilchenoberfläche eine sehr konzentrierte Lösung<sup>1)</sup>, was eine große Oberflächenleitfähigkeit bedingt. Die Ionen haben ja bei Verschiebungen parallel zur Oberfläche der Teilchen keine Potentialdifferenz zu überwinden, die durch die Kräfte der erwähnten Anziehung bedingt wäre. Die Leitfähigkeit im Kugelinnern ist für uns belanglos, da die große Oberflächenleitfähigkeit von vornherein bedingt, daß im Innern kein Feld herrscht.

Unsere Rechnung ist auf Gleich- und Wechselfelder anwendbar. Im Falle des Gleichfeldes bedeutet  $E_0$  die Feldstärke, im Falle des Wechselfeldes den Effektivwert der Feldstärke. Ebenso sollen im Falle des Wechselfeldes alle Bezeichnungen für periodisch variierende Größen den Effektivwert dieser Größen bedeuten.

## § 2. Mathematische Behandlung des Problems

Als erste Näherung betrachten wir das Feld, das entstünde, wenn jede Kugel so wirken würde, als ob die andere nicht vorhanden wäre. Für den Außenraum der beiden Kugeln ist dieses

1) O. Stern, Ztschr. Elektrochem. 30. S. 508. 1924.

Feld identisch mit dem Feld, das entstehen würde, wenn in den Mittelpunkten der beiden Kugeln je ein Dipol<sup>1)</sup> vom Moment

$$(1) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{E}_0 a^{3/2})$$

sitzen würde. Diese erste Näherung vernachlässigt also die Wechselwirkung zwischen den beiden Kugeln. Um diese Wechselwirkung zu erfassen, ersetzen wir zunächst den im Mittelpunkt  $A_0^0$  der Kugel  $K_1$  (Fig. 1) befindlichen, fiktiven Dipol durch zwei Ladungen  $\alpha_0 = +1$

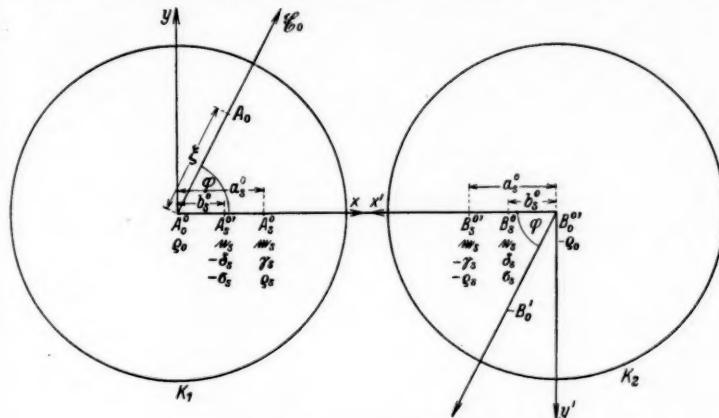


Fig. 1. Lage der Ladungen und Dipole

und  $-\alpha_0^0 = -1$ . Die Ladung  $\alpha_0$  sitzt im Punkte  $A_0$  auf einem Radiusvektor, den wir von  $A_0^0$  in der Richtung des Feldes ziehen, im Abstande  $\xi$  von  $A_0^0$ .  $-\alpha_0^0$  sitzt in  $A_0^0$ .

Vorläufig wollen wir annehmen, daß die beiden Kugeln irgendwie konstant auf dem Potential gehalten werden, das sie bei der erwähnten ersten Näherung annehmen. Das Potential, das wir bei jedem weiteren Schritt hinzufügen haben, ist also Null. Es ist daher so weiterzurechnen, als ob die Kugeln „geerdet“ wären. Wir haben also zunächst für die Ladung  $a_0$  das Problem der Punktladung gegenüber zwei leitenden geerdeten Kugeln zu lösen.

Dieses Problem läßt sich nach der Methode der sukzessiven Spiegelungen lösen, in ganz analoger Weise, wie dies für den Fall,

1) Unter Ladung wird im folgenden immer *freie*, nicht *wahre* Ladung verstanden. Ebenso ist ein Dipol aus zwei freien, nicht zwei wahren Ladungen entstanden zu denken.

## 2) Abraham-Becker, Theorie d. Elektrizität, Bd. 1.

daß die Ladung  $\alpha_0$  im Mittelpunkt der Kugel  $K_1$  sitzt, bekannt ist<sup>1)</sup>. Für den Außenraum der beiden Kugeln ergibt sich ein Feld, das so beschaffen ist, als ob es von zwei unendlichen Folgen von Ladungen erzeugt wäre. Die Ladungen der einen Folge bezeichnen wir mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots$ , die Punkte, in denen sich diese Ladungen befinden, bezüglich mit  $A_1, A_2, \dots, A_s, \dots$ . Diese Punkte liegen in der Kugel  $K_1$ . Die Ladungen der zweiten Folge sollen  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \dots$  heißen und bezüglich in den Punkten  $B_1, B_2, \dots, B_s, \dots$  liegen.  $B_1, B_2, \dots$  liegen in der Kugel  $K_2$ .  $\beta_s$  ist das Spiegelbild von  $\alpha_{s-1}$  in bezug auf  $K_2, \alpha_s$  das Spiegelbild von  $\beta_s$  in bezug auf  $K_1 (s = 1, 2, \dots)$ . Alle Punkte  $A_s$  und  $B_s$  liegen in der Ebene (Zeichenebene in Fig. 1), welche die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte und den Vektor  $\mathfrak{E}_0$  enthält. In dieser Ebene führen wir zwei Koordinatensysteme  $\mathfrak{K}(x, y)$  und  $\mathfrak{K}'(x', y')$  ein.  $\mathfrak{K}$  habe seinen Ursprung in  $A_0^0$  und seine positive  $x$ -Achse zeige von  $A_0^0$  nach dem Mittelpunkt  $B_0^0$  von  $K_2$ .  $\mathfrak{K}'$  habe seinen Ursprung in  $B_0^0$  und seine positive  $x'$ -Achse zeige von  $B_0^0$  nach  $A_0^0$ . Die beiden Koordinatensysteme sind also entgegengesetzt orientiert. Einem Punkte, welcher in bezug auf  $\mathfrak{K}$  die Koordinaten  $x, y$  hat, schreiben wir in bezug auf dieses Koordinatensystem die komplexe Koordinate  $z = x + iy$  zu, einem Punkte, welcher in bezug auf  $\mathfrak{K}'$  die Koordinaten  $x', y'$  hat, schreiben wir in bezug auf dieses Koordinatensystem die komplexe Koordinate  $z' = x' + iy'$  zu.

Z. B. hat der Punkt  $A_0$  in Bezug auf  $\mathfrak{K}$  die Koordinate

$$(2) \quad a_0 = \xi \cos \varphi + i \xi \sin \varphi = \xi e^{i\varphi}.$$

$\varphi$  bedeutet den Winkel zwischen Feldrichtung und Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte.  $a_s$  sei die Koordinate, welche  $A_s$  in bezug auf  $\mathfrak{K}$  hat,  $b_s$  die Koordinate, welche  $B_s$  in bezug auf  $\mathfrak{K}'$  hat,  $\bar{b}_s$  der zu  $b_s$  konjugiert komplexe Wert. Die Gleichungen, mittels deren sich die  $\bar{b}_s$  aus den  $a_{s-1}$  und die  $a_s$  aus den  $\bar{b}_s$  berechnen, sind genau analog den entsprechenden Gleichungen des bekannten Problems „ $\alpha_0$  in  $A_0^0$ “. Wenn man für unser Problem die Gleichungen, mittels deren sich die  $\beta_s$  aus den  $\alpha_{s-1}$  und  $a_{s-1}$  berechnen, und die Gleichungen, mittels deren sich die  $\alpha_s$  aus den  $\beta_s$  und  $\bar{b}_s$  berechnen, formal analog schreibt den entsprechenden Gleichungen des genannten bekannten Problems, so erhält man für  $\alpha_s$  und  $\beta_s$  Komplexzahlen, deren Phase zwar physikalisch bedeutungslos ist, deren Absolutbetrag aber den Absolutbetrag der betreffenden Ladung richtig wiedergibt. Dabei sind alle  $\alpha_s$  positiv, weil sie aus dem posi-

1) Vgl. z. B. F. Kottler in Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XII. S. 437ff.

tiven  $\alpha_0$  durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen hervorgehen, und alle  $\beta_s$  negativ, weil sie aus dem  $\alpha_0$  durch eine ungerade Anzahl von Spiegelungen hervorgehen. Die Berechnung der  $a_s$ ,  $b_s$  (und damit  $b_s$ ), ferner der  $\alpha_s$  und  $\beta_s$  verläuft in unserem Falle ganz analog wie in dem bekannten Falle „ $\alpha_0$  in  $A_0^0$ “, wobei der einzige wesentliche Unterschied darin besteht, daß  $a_0$  in unserem Falle den durch Gl. (2) gegebenen Wert hat, anstatt des Wertes Null. Man erhält:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_s(\xi) = \frac{[c(c - 2\xi e^{i\varphi}) - 2a^2] \sin h 2(s-1)\mu + \sqrt{c^2 - 4a^2}(c - \xi e^{i\varphi}) \cos h 2(s-1)\mu}{(c - 2\xi e^{i\varphi}) \sin h 2s\mu + \sqrt{c^2 - 4a^2} \cos h 2s\mu}, \\ b_s(\xi) = a^2 \frac{(c - 2\xi e^{-i\varphi}) \sin h 2(s-1)\mu + \sqrt{c^2 - 4a^2} \cos h 2(s-1)\mu}{[c(c - \xi e^{-i\varphi}) - 2a^2] \sin h 2(s-1)\mu + (c - \xi e^{-i\varphi})} \\ \quad \cdot \sqrt{c^2 - 4a^2} \cos h 2(s-1)\mu. \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_s(\xi) = \left| \frac{\sqrt{c^2 - 4a^2}}{(c - 2\xi e^{i\varphi}) \sin h 2s\mu + \sqrt{c^2 - 4a^2} \cos h 2s\mu} \right|, \\ \beta_s(\xi) = - \left| \frac{a \sqrt{c^2 - 4a^2}}{[c(c - \xi e^{i\varphi}) - 2a^2] \sin h 2(s-1)\mu + (c - \xi e^{i\varphi}) \sqrt{c^2 - 4a^2} \cos h 2(s-1)\mu} \right|. \end{array} \right.$$

Dabei ist  $c$  der Abstand der Kugelmittelpunkte und  $\mu$  definiert durch:

$$(5) \quad \cos h \mu = \frac{c}{2a}, \quad \sin h \mu = \frac{\sqrt{c^2 - 4a^2}}{2a}.$$

Der Tatsache, daß  $a_s$ ,  $b_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  Funktionen von  $\xi$  sind, ist durch die Schreibweise  $a_s(\xi)$ ,  $b_s(\xi)$ ,  $\alpha_s(\xi)$ ,  $\beta_s(\xi)$  Rechnung getragen.

Das Feld, welches dadurch entsteht, daß sich die Ladung  $-\alpha_0^0$  in  $A_0^0$  gegenüber den beiden leitenden, geerdeten Kugeln befindet, ist so beschaffen, als ob es von den Ladungen  $-\alpha_s^0$ ,  $-\beta_s^0$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) herrühren würde. Die Ladungen  $-\alpha_s^0$  befinden sich in den in  $K_1$  gelegenen Punkten  $A_s^0$ , welche in bezug auf das Koordinatensystem  $\mathfrak{K}$  die Koordinaten  $a_s^0$  haben. Die Ladungen  $-\beta_s^0$  befinden sich in den in  $K_2$  gelegenen Punkten  $B_s^0$ , welche in bezug auf  $\mathfrak{K}$  die Koordinaten  $b_s^0$  haben. Die Größe der Ladungen  $-\alpha_s^0$ ,  $-\beta_s^0$  und die Koordinaten  $a_s^0$ ,  $b_s^0$  erhält man ersichtlich, indem man in den Gl. (3) und (4)  $\xi = 0$  setzt:

$$(6) \quad -\alpha_s^0 = -\alpha_s(0) = -\frac{\sin h \mu}{\sin h(2s+1)\mu}, \quad -\beta_s^0(0) = -\beta_s(0) = \frac{\sin h \mu}{\sin h 2s\mu}.$$

$$(7) \quad a_s^0 = a_s(0) = a \frac{\sin h 2s\mu}{\sin h(2s+1)\mu}, \quad b_s^0 = b_s(0) = a \frac{\sin h(2s-1)\mu}{\sin h 2s\mu}.$$

Wir multiplizieren nun die Ladungen in  $A_0$  und  $A_0^0$  mit dem Faktor  $|\mathfrak{M}|/\xi$  und gehen dann zur Grenze  $\xi \rightarrow 0$  über. Dabei verwandelt sich das System der Ladungen in  $A_0$  und  $A_0^0$  in einen

Dipol vom Moment  $\mathfrak{M}$  im Punkte  $A_s^0$ . Die Systeme, die aus den Ladungspaaren  $(\alpha_s - \alpha_s^0)$  und  $(\beta_s - \beta_s^0)$  werden, beschreiben dann das Feld, das durch den Dipol  $\mathfrak{M}$  in Wechselwirkung mit den beiden leitenden, geerdeten Kugeln erzeugt wird. Um zu erkennen, wie diese Systeme aussehen, zerlegen wir die Ladung  $\alpha_s$  in  $A_s$  (vgl. Fig. 2) in eine Ladung von der Größe  $\alpha_s^0$  und eine Ladung von

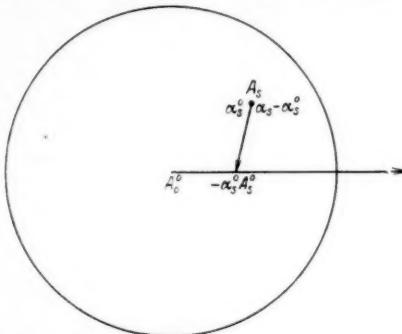


Fig. 2. Entstehung der Dipole  $m$ .

der Größe  $\alpha_s - \alpha_s^0$ . Die Ladungen  $\alpha_s^0$  in  $A_s$  und  $-\alpha_s^0$  in  $A_s^0$  ergeben einen Dipol endlicher Ausdehnung<sup>1)</sup> vom Moment

$$m_s = \alpha_s^0 (a_s - a_s^0) = \alpha_s(0) [a_s(\xi) - a_s(0)].$$

(Die Zahl  $m_s$  gibt durch ihren Absolutbetrag den Absolutbetrag des Momentes und durch ihre Phase dessen Richtung an.) Bei der Multiplikation von  $\alpha_0$  und  $-\alpha_0^0$  mit  $|\mathfrak{M}|/\xi$  multiplizieren sich die Ladungen  $\alpha_s$  und  $-\alpha_s^0$  mit dem selben Faktor, daher auch das Moment  $m_s$ . Gehen wir dann zur Grenze  $\xi \rightarrow 0$  über, so ergibt sich:

$$(8) \quad \begin{cases} m_s = |\mathfrak{M}| \alpha_s(0) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [a_s(\xi) - a_s(0)] = \mathfrak{M} \alpha_s(0) \frac{d}{d\xi} a_s(\xi) \Big|_{\xi=0}, \\ m_s = |\mathfrak{M}| \frac{\sin h^s \mu}{\sin h^s (2s+1) \mu} e^{i\varphi}. \end{cases}$$

Die Ladung  $\alpha_s - \alpha_s^0$  geht bei der Multiplikation mit  $|\mathfrak{M}|/\xi$  und darauffolgendem Grenzübergang  $\xi \rightarrow 0$  über in

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_s = |\mathfrak{M}| \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [\alpha_s(\xi) - \alpha_s(0)] = |\mathfrak{M}| \frac{d \alpha_s(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0}, \\ \gamma_s = a^2 \sin h \mu \frac{\sin h^{2s} \mu}{\sin h^s (2s+1) \mu} \cos \varphi. \end{cases}$$

1) Wenn wir von „Dipol“ schlechthin sprechen, so meinen wir immer einen solchen, der von unendlich nahe aneinanderliegenden (unendlich großen) Ladungen gebildet wird.

Da beim Grenzübergang  $\xi \rightarrow 0$   $A_0$  in  $A_s^0$  wandert, geht dabei auch  $A_s$  in  $A_s^0$  über. Daher befindet sich sowohl der Dipol  $m_s$  als auch die Ladung  $\gamma_s$  in  $A_s^0$  (vgl. Fig. 1). Ebenso zeigt man, daß aus dem Ladungspaar  $\beta_s$  und  $-\beta_s^0$  bei der Multiplikation mit  $|\mathfrak{M}|/\xi$  und darauf folgendem Grenzübergang  $\xi \rightarrow 0$  ein in  $B_s^0$  gelegenes System entsteht, welches aus einem Dipol

$$(10) \quad n_s = \mathfrak{M} \frac{\sin h^s \mu}{\sin h^s 2 s \mu} e^{-i\varphi}$$

und einer Ladung

$$(11) \quad \delta_s = -a^2 \sin h \mu \frac{\sin h (2s-1) \mu}{\sin h^s 2 s \mu} \cos \varphi$$

gebildet wird.

Wir wollen nun die Wirkung des Dipoles  $\mathfrak{M}$ , welcher in der Kugel  $K_2$  sitzt, erfassen. Dieses Problem ist ganz analog dem soeben behandelten Problem, die Wirkung des in  $K_1$  sitzenden Dipoles zu erfassen. Wir müssen nur bei der Behandlung des in  $K_2$  sitzenden Dipoles alles auf das Koordinatensystem  $\mathfrak{K}'$  beziehen, was wir früher auf  $\mathfrak{K}$  bezogen haben, und umgekehrt. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Problemen besteht dann nur noch darin, daß der Dipol  $\mathfrak{M}$  in  $K_2$  in bezug auf  $\mathfrak{K}'$  das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie der in  $K_1$  gelegene Dipol  $\mathfrak{M}$  in bezug auf  $\mathfrak{K}$ . Wir erhalten demgemäß bei der Behandlung des in  $K_2$  sitzenden Dipoles  $\mathfrak{M}$  in gewissen Punkten  $A_s^{0'}$   $B_s^{0'}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) Systeme, bestehend aus je einer Ladung und einem Dipol. Die in  $K_1$  liegenden Punkte  $A_s^{0'}$  haben in bezug auf  $\mathfrak{K}$  dieselben Koordinaten  $b_s^0$  (Gl. 7), wie die entsprechenden Punkte  $B_s^{0'}$  in bezug auf  $\mathfrak{K}'$ . Ebenso haben die in  $K_2$  gelegenen Punkte  $B_s^{0'}$  in bezug auf  $\mathfrak{K}'$  die Koordinaten  $a_s^0$  (Gl. 7) (Fig. 1). Da beim Problem des Dipoles in  $K_2$  das Vorzeichen des Dipoles  $\mathfrak{M}$  entgegengesetzt ist dem entsprechenden Vorzeichen des früher behandelten Problems, haben alle Ladungen entgegengesetztes Vorzeichen. Wir erhalten also in  $A_s^{0'}$  Ladungen von der Größe  $-\delta_s$  (Gl. 11) und in  $B_s^{0'}$  Ladungen von der Größe  $-\gamma_s$  (Gl. 9). Auch die Dipole unseres jetzigen Problems haben, in bezug auf  $\mathfrak{K}'$ , entgegengesetztes Vorzeichen, wie die Dipole des früheren Problems in bezug auf  $\mathfrak{K}$ . Beziehen wir aber auch bei unserem jetzigen Problem des Dipoles  $\mathfrak{M}$  in  $K_2$  alle Dipoles auf  $\mathfrak{K}$ , so müssen wir, da ja  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  entgegengesetzt orientiert sind, das Vorzeichen nochmals umkehren und erhalten in  $A_s^{0'}$  Dipole vom Moment  $n_s$  (Gl. 10) und in  $B_s^{0'}$  Dipole vom Moment  $m_s$  (Gl. 8).

Insgesamt sind nach unseren bisherigen Berechnungen in der Kugel  $K_1$  Ladungen aufgespeichert, deren Summe gegeben ist durch

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\gamma_s - \delta_s),$$

während sich in  $K_2$  Ladungen befinden, die insgesamt

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-\gamma_s + \delta_s)$$

ergeben. Nun sind aber in Wirklichkeit die beiden Kugeln nicht, wie bisher angenommen wurde, künstlich auf dem Potential gehalten, das sie bei der erwähnten ersten Näherung annehmen. Die Bedingung ist vielmehr, daß die beiden Kugeln ungeladen sein sollen. Um dies zu erreichen, müssen wir im Mittelpunkt  $A_0^0$  der Kugel  $K_1$  eine gewisse Ladung  $\varrho_0$  anbringen. Gleichzeitig müssen wir aus Symmetriegründen im Mittelpunkt von  $K_2$  eine Ladung  $-\varrho_0$  anbringen. Das Anbringen dieser beiden Ladungen bewirkt natürlich, daß die beiden Kugeln ein anderes, neues Potential annehmen. Auf diesem neuen Potential denken wir uns dann die Kugeln festgehalten. Bei jedem weiteren Schritte haben wir dann dem Potential der Kugeln das Potential Null hinzuzufügen, die Kugeln sind also wieder als geerdet zu betrachten. Das Feld, das im Außenraum der beiden Kugeln dadurch entsteht, daß in  $A_0^0$  die Ladung  $\varrho_0$  sitzt, ist so beschaffen, als ob es von Ladungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$  herrühren würde, welche sich bezüglich in den Punkten  $B_1^0, A_1^0, B_2^0, A_2^0 \dots$  befinden, das Feld, welches im Außenraum der beiden Kugeln dadurch entsteht, daß in  $B_0^0$  die Ladung  $-\varrho_0$  sitzt, ist so beschaffen, als ob es von Ladungen  $-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3 \dots$  herrühren würde, welche sich bezüglich in den Punkten  $A_1^0, B_1^0, A_2^0, B_2^0 \dots$  befinden.

Wir beachten, daß die Ladung  $\varrho_s$  durch denselben Prozeß gewonnen ist wie die Ladung  $-\alpha_s^0$ , nur daß die primäre Ladung  $\varrho_0$  ist, nicht  $-1$ . Daher gilt:  $\varrho_s : -\alpha_s = \varrho_0 : 1$ , oder:

$$(12) \quad \varrho_s = \varrho_0 \alpha_s^0.$$

Ebenso ergibt sich:

$$(13) \quad \sigma_s = \varrho_0 \beta_s^0.$$

Durch das Anbringen der Ladungen  $\varrho_0$  und  $-\varrho_0$  in den Kugelmittelpunkten haben wir also erreicht, daß sich auf  $K_1$  insgesamt die Ladung

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varrho_s - \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s$$

ansammelt, während sich auf  $K_2$  die Ladung

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-\varrho_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s$$

anhäuft. Unsere Bedingung, daß die Kugeln im ganzen ungeladen sein sollen, ist dann erfüllt, wenn:

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\gamma_s - \delta_s) + \sum_{s=0}^{\infty} \varrho_s - \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s = 0$$

oder, wegen (12), (13), (9), (11), (6)

$$(14) \quad \varrho_0 = - \frac{\sum_{s=1}^{\infty} (\gamma_s - \delta_s)}{\sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^0 - \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s^0} = - \frac{|\mathfrak{M}| \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h s \mu}{\sin h^2 (s+1) \mu}}{a \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sin h s \mu}} \cos \varphi.$$

Das Feld im Außenraum der Kugeln setzt sich also aus dem ursprünglichen Feld  $\mathfrak{E}_0$  und einem Zusatzfeld zusammen, wobei das Zusatzfeld so beschaffen ist, als ob es durch die Ladungen  $\gamma_s$ ,  $-\gamma_s$ ,  $\delta_s$ ,  $-\delta_s$ ,  $\varrho_s$ ,  $-\varrho_s$ ,  $\sigma_s$  und  $-\sigma_s$  und Dipole  $\mathfrak{m}_s$ ,  $\mathfrak{n}_s$  entstanden wäre, die wir soeben berechnet haben. Diese Ladungen und Dipole können ersetzt werden durch eine resultierende Ladung, ein resultierendes Dipolmoment, ein resultierendes Quadrupolmoment und resultierende Multipolmomente höherer Ordnung. (Das läuft darauf hinaus, daß wir das Zusatzfeld, das ja der Laplaceschen Gleichung genügt, nach räumlichen Kugelfunktionen entwickeln). Die resultierende Ladung ist natürlich Null. Die Energie, welche der resultierende Dipol (sein Moment heiße  $\mathfrak{N}$ ) im Felde  $\mathfrak{E}_0$  hat beträgt, wenn  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante des Suspensionsmittels ist:

$$(15) \quad U = - \frac{\epsilon}{2} (\mathfrak{N} \mathfrak{E}_0),$$

während die Multipole höherer Ordnung keine Energie im homogenen Feld haben. Wir können uns also auf die Berechnung von  $\mathfrak{N}$  beschränken.

Das Dipolmoment, welches Ladungen  $e_i$  in bezug auf den Ursprung irgendeines Koordinatensystems ergeben, ist bekanntlich  $\sum e_i \mathfrak{r}_i$ , wenn  $\mathfrak{r}_i$  den Radiusvektor vom Ursprung bis zur Ladung  $e_i$  bedeutet. Dieser Ausdruck ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, wenn  $\sum e_i = 0$ , was in unserem Falle erfüllt ist. Wir beziehen alles auf das Koordinatensystem  $\mathfrak{A}$  und erhalten für den von den Ladungen gelieferten Beitrag  $\mathfrak{N}$ , zu  $\mathfrak{N}$ :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_i = \sum_{s=1}^{\infty} [a_s^0(\gamma_s + \varrho_0 \alpha_s^0) - b_s^0(\delta_s + \varrho_0 \beta_s^0) \\ \quad + (c - b_s^0)(\delta_s + \varrho_0 \beta_s^0) + (c - a_s^0)(-\gamma_s - \varrho_0 \alpha_s^0)]. \end{array} \right.$$

Der von den Dipolen zu  $\mathfrak{N}$  gelieferte Beitrag  $N_D$  ist einfach gleich der Summe der Dipolmomente:

$$(17) \quad \mathfrak{N}_D = 2 \sum_{s=1}^{\infty} (\mathfrak{m}_s + \mathfrak{n}_s).$$

Indem wir über  $\mathfrak{m}_s$  nur von 1 bis  $\infty$ , nicht von Null bis  $\infty$  summieren, lassen wir die Dipole  $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{M}$  unberücksichtigt. Die Energie, welche diese Dipole im homogenen Feld  $\mathfrak{E}_0$  haben, hat aber auch mit der Wechselwirkung der beiden Kugeln nichts zu tun, denn diese Energie ist ja gerade jene Energie, welche die beiden Kugeln hätten, wenn jede Kugel so wirken würde, als ob die andere nicht vorhanden wäre, als ob also keine Wechselwirkung bestünde. Wir setzen in (16) und (17) die Werte ein, die sich aus (1), (6)–(11) und (14) ergeben, und zerlegen  $\mathfrak{N}$  in die Komponenten  $N_x$  und  $N_y$  und erhalten nach elementarer Rechnung:

$$(18) \quad N_x = 2a^3 |\mathfrak{E}_0| f \cos \varphi, \quad N_y = 2a^3 |\mathfrak{E}_0| g \sin \varphi.$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \sin h \mu \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h^2 s \mu}{\sin h^3 (s+1) \mu} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h^2 \mu}{\sin h^3 (s+1) \mu} \right. \\ \quad \left. - \frac{\left[ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h s \mu}{\sin h^3 (s+1) \mu} \right]^2}{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sin h s \mu}} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(20) \quad g = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\sin h^3 \mu}{\sin h^3 (s+1) \mu}.$$

Gemäß (15) erhalten wir dann:

$$(21) \quad U = -\varepsilon a^3 \mathfrak{E}_0^2 (f \cos^2 \varphi + g \sin^2 \varphi).$$

Wir merken noch andre Formen für  $f$  an, die man durch leichtes Umrechnen findet:

$$(22) f = -1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h^3 \mu}{\sin h^3 s \mu} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h^3 \mu}{\sin h s \mu} - \frac{\left[ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos h s \mu \sin h^3 \mu}{\sin h^3 s \mu} \right]^2}{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin h \mu}{\sin h s \mu}}.$$

$$(23) f = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\sin h^3 \mu}{\sin h^3 s \mu} + \frac{\sin h^3 \mu}{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sin h s \mu}} - \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^t \frac{\sin h^3 (t-s) \mu}{\sin h^3 s \mu \sin h^3 t \mu}.$$

### § 3. Diskussion der Schlußformeln

Aus der Form (23) sieht man, daß stets  $f > 0$ . Dagegen ist stets  $g < 0$ , da stets der negative  $(2s-1)^{\text{te}} \text{ Summand}$  dem Betrage

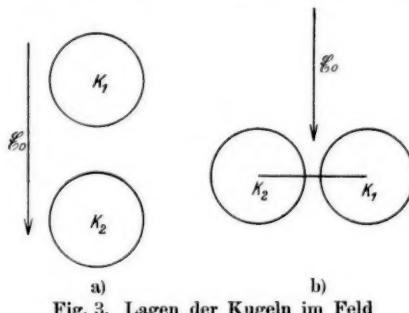


Fig. 3. Lagen der Kugeln im Feld

nach größer ist als der positive  $(2s-1)^{\text{te}}$ . Fassen wir also den  $(2s-1)^{\text{ten}}$  Summand und den  $(2s)^{\text{ten}}$  Summand zusammen, so ergeben sich stets negative Zahlen, so daß wir die ganze Summe als Summe von lauter negativen Zahlen darstellen können. Für  $\cos \varphi = 1$ , d. h.  $\varphi = 0$  (Fig. 3a) wird daher die Energie stets negativ, für  $\sin \varphi = 1$ , d. h.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  wird die Energie positiv (Fig. 3b). Die beiden Kugeln werden sich also stets so zu stellen versuchen, daß ihre Verbindungsline in die Feldrichtung fällt.

Wir betrachten nun den asymptotischen Verlauf von  $f$  und  $g$ , für den Fall, daß sich die Kugeln weit voneinander entfernen ( $c \rightarrow \infty$ ), und den Grenzwert, den  $f$  und  $g$  annehmen, wenn sich die Kugeln bis zur Berührung einander nähern ( $c \rightarrow 2a$ ).

1.  $c \rightarrow \infty$ . Hier wird  $\mu$  sehr groß,  $\sin h \mu \sim \frac{1}{2} e^\mu$  wächst ebenfalls über alle Grenzen. Wir brauchen daher in  $f$  und  $g$  nur jene

Glieder zu berücksichtigen, die, nachdem wir  $\sin h \mu$  durch  $e^\mu$ ,  $\sin h s \mu$  durch  $e^{s\mu}$  ersetzt haben,  $e^{-\mu}$  in der niedrigsten Potenz enthalten. Es ergibt sich:

$$(24) \quad f \sim 2e^{-3\mu} \sim 2 \frac{a^3}{c^3}, \quad g \sim -e^{-3\mu} \sim -\frac{a^3}{c^3}.$$

Im Unendlichen geht also die Energie über in

$$(25) \quad U = -\varepsilon \frac{a^6}{c^3} \mathfrak{E}_0^2 (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Denselben Ausdruck erhält man, wenn man bloß die Wechselwirkungsenergie der Dipole  $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_0 a^3$  berechnet. Dies ist selbstverständlich, da ja bei großem Abstand der Kugeln die Dipole, welche durch die Wechselwirkung der Kugeln induziert werden, sehr klein werden gegenüber den Dipolen  $\mathfrak{M}$ .

2.  $c \rightarrow 2a$ . Hier geht  $\mu = 0$  und

$$(26) \quad f \rightarrow 2\zeta(3) - 1 = 1,404, \quad g \rightarrow \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s^3} = -0,099.$$

Auf Konvergenzbeweise wollen wir der Kürze halber verzichten.

Würde man bloß die Wechselwirkung der beiden Dipole  $\mathfrak{M}$  berücksichtigen, d. h. würde man die Formel (24) bis zur Berührung der Kugeln anwenden, so würde man erhalten:

$$(27) \quad f = 0,25, \quad g = -0,125.$$

Es zeigt sich also, daß die durch die Wechselwirkung induzierten Dipole und Ladungen für den Fall  $\varphi = 0$  die Anziehungsenergie auf fast das 6fache erhöhen, für den Fall  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  die Abstoßungsenergie um etwa 20% erniedrigen. Der Winkel  $\varphi_0$ , bei dem die Energie Null ist, d. h. ebenso groß wie bei unendlichem Abstand der Kugeln, ist gegeben durch  $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{f}{-g} = \frac{1,404}{0,099} = 14,18$ , woraus sich  $\varphi_0$  berechnet zu:

$$(28) \quad \varphi_0 = 75^\circ 15'.$$

Bei bloßer Berücksichtigung der Dipole  $\mathfrak{M}$  ergibt sich

$$(29) \quad \varphi_0 = 54^\circ 45'.$$

Wir wollen nun die Energie  $U$  an einem Beispiel mit der Energie der Brownschen Molekularbewegung vergleichen: Es sei  $|\mathfrak{E}_0| = 300$  Volt/cm = 1 abs. elektrostat. Einh.  $\varepsilon = 80$  (ungefähr dem Wasser entsprechend)  $a = 1\mu$  (entsprechend den Versuchen von Muth). Für  $\varphi = 0$  und Berührung erhalten wir dann:

$$U \sim 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ Erg.}$$

Die Energie  $kT$  der Brownschen Bewegung wird bei der absoluten Temperatur  $T = 300^{\circ}$  wegen  $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$  Erg/grad

$$kT \sim 10^{-14} \text{ Erg.}$$

Die Energie der elektrischen Kräfte ist also mehrere tausend Mal größer als die Energie der Brownschen Bewegung, was zur Ausbildung der Perlschnüre führt.

#### § 4. Zusammenfassung

Zu dem Zwecke, die in elektrischen Feldern beobachtete Bildung von „Perlschnüren“ aus Kolloidteilchen zu erklären, wird das Feld berechnet, das entsteht, wenn zwei leitende isolierte Kugeln in ein homogenes elektrisches Feld gebracht werden. Die durch die Anwesenheit der Kugeln bedingte Feldenergie  $U$  wird in Form von Reihen angegeben.

Es ergibt sich aus der genauen Rechnung, daß die Kugeln stets die Tendenz haben, sich so zu stellen, daß ihre Verbindungsline parallel zur Feldrichtung liegt, was die Bildung der „Perlschnüre“ erklärt. Dieses Resultat steht in Übereinstimmung mit dem Resultat, das man erhält, wenn man bei der ersten Näherung stehen bleibt und nur die Dipole betrachtet, die durch das homogene Feld in jeder einzelnen Kugel induziert werden. Quantitativ ergibt sich jedoch, daß die Arbeit  $U$ , welche gegen die Abstoßungskräfte zu leisten ist, um eine Kugel  $K_2$  aus dem Unendlichen bis zur Berührung an die Kugel  $K_1$  heranzubringen, wenn die Verbindungsline  $K_1 K_2$  normal auf der Feldrichtung steht, durch die erste Näherung um 20% zu groß angegeben wird, daß dagegen die Arbeit, welche die Anziehungskräfte leisten, um  $K_2$  aus dem Unendlichen an  $K_1$  heranzuziehen, wobei die Verbindungsline  $K_2 K_1$  parallel dem Feld sein soll, bei exakter Rechnung etwa 6 mal größer herauskommt als bei der ersten Näherung. An einem numerischen Beispiel, das den Experimenten entspricht, wird gezeigt, daß die Energie der Brownschen Bewegung, welche die „Perlschnüre“ zu zerstören sucht, um Zehnerpotenzen kleiner ist als die elektrische Energie  $U$ , welche die Perlschnüre aufbaut.

Uppsala, März 1936.

(Eingegangen 28. August 1936)

**Die Wärmeleitungsgesetze in bewegten Medien****Entgegnung zu den Ausführungen des Herrn R. Fürth<sup>1)</sup>****Von M. Lang**

Der Verf. des in Rede stehenden Aufsatzes<sup>2)</sup> hat in seiner Untersuchung gezeigt, daß die Fouriersche Theorie bei Anwendung auf den Wärmeleitungsvorgang im bewegten Mittel den Vorgang nicht wesensrichtig beschreibt und findet als Grund für diese Tatsache den Umstand der molekularkinetischen Struktur des Mittels, welchen Tatbestand die Fourierschen Entwicklungen, die unter Zugrundelegung kontinuierlicher Bauform der Materie aufgebaut sind, nicht beinhaltet.

Die Erscheinung der endlichen Ausbreitungstiefe der Wärme entgegen der Strömungsrichtung des Mittels, sowie das Bestehen einer kritischen Geschwindigkeit, über die hinaus ein Wärmetransport entgegen der Bewegungsrichtung nicht mehr möglich ist, kann die Fouriersche Theorie nicht erfassen, da diese beiden Gegebenheiten in unmittelbarer Beziehung zur mittleren Molekulargeschwindigkeit des betrachteten Mittels stehen und diese Größe die Fourierschen Gleichungen überhaupt nicht enthalten.

Herr R. Fürth nimmt nun zu diesem oben geschilderten Tatbestand in seinen „Bemerkungen“ zu meiner Untersuchung *zwei verschiedene, zueinander vollkommen gegensätzliche Meinungen ein*: In **Punkt 1** seiner Ausführungen stellt Fürth wie folgt fest: „Von dieser Auffassung ausgehend kann man als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärme die Geschwindigkeit definieren...“ „Sie ergibt sich in der Tat im Gegensatz zu der Fourierschen Theorie als *endlich*.“ Auf Grund dieser Erkenntnis schließt Fürth weiter: „In einem strömenden Medium kann überdies auch nach unendlich langer Zeit, d. h. im stationären Falle, die erwähnte Begrenzungsfäche in der zur Strömungsrichtung entgegengesetzten Richtung nur bis zu einer endlichen Entfernung vom Ausgangsgebiet vordringen. Dies wird auch von Lang, a. a. O., S. 393f., richtig erkannt.“ Mit diesen beiden Feststellungen bestätigt übrigens Fürth

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 256. 1936.

2) M. Lang, Ann. d. Phys. [5] 24. S. 393. 1935.

meine nach anderen Überlegungen gefundenen Erkenntnisse gleichen Inhaltes, die den Kern meiner Untersuchung bildeten.

Trotz dieser richtigen Erkenntnis der Tatsachen kommt Fürth in **Punkt 3** seiner Ausführungen zu der entgegengesetzten Behauptung. Er behandelt hier den Fall der Wärmeausbreitung im Heißdampfkern entgegen der Strömungsrichtung des Mittels und gelangt hier zu dem mit den obigen Feststellungen unvereinbaren Ergebnis, daß die Ausbreitungszone bis ins Unendliche fortschreitet: „... die Temperatur  $\Theta_H$  wird erst im Unendlichen erreicht...“ Dieser Widerspruch gestaltet die Ausführungen von Herrn Fürth äußerst problematisch.

In Punkt 1 wird weiter ausgeführt, daß die Richtigkeit der Annahme eines Sprunges des Temperaturgradienten an der Begrenzungsfläche des Temperaturfeldes zu bezweifeln ist. Es ist an sich richtig, daß der scharfe Begrenzungsschatten der Fig. 2 nicht unbedingt als Sprung des Temperaturgradienten gedeutet werden muß. Die von mir zwecks klarer Herausarbeitung des Tatbestandes verwendete einfache Methode liefert einen Knick der Temperaturlinie. Es ist sehr leicht möglich, aber nicht wahrscheinlich, daß sich mit einer durch Verfeinerung der mathematischen Methoden erhöhten Annäherung der analytischen Untersuchung an die Wirklichkeit ein stetiger Übergang ergibt, obwohl manche Überlegungen gerade auf eine Unstetigkeit hinweisen. Es ist zu beachten, daß der Temperaturgradient nicht zu jenen physikalischen Größen gehört, denen Stetigkeit immanent ist; so sind viele Vorgänge bekannt, bei denen die Temperaturlinie einen Knick aufweist. Die Entscheidung in dieser Frage bleibt jedoch offen, auch Fürth hat in seinen Ausführungen nichts zur Klärung derselben beigetragen.

Zu Punkt 2 ist zu bemerken: Daß zwischen Gl. (11) meines Aufsatzes und den Entwicklungen von Jeans keine Übereinstimmung zu erzielen ist, ist auf der Hand liegend, da ich mich einer anderen Methode, die zwar keine genauen aber dafür übersichtlichen Ergebnisse, um die es sich hier allein handelt, bedient habe. Die Absicht in der Wahl der von mir angewandten Verfahren lag darin, einen Ausdruck von der Form

$$(a) \quad 0 = F_{\text{phän.}}(w, \vartheta, x \dots) + t^* \cdot F_{\text{korp.}}(w, \vartheta, x \dots)$$

zu gewinnen, worin  $t^*$  die Verweilzeit bedeutet. Gerade die letzten Ergebnisse auf dem Gebiete der Turbulenzstatistik dürften zur Annahme berechtigen, daß grundsätzlich jeder Vorgang zwei Erscheinungskomponenten besitzt, eine phänomenologische und eine korpuskularkinetische, von denen, den Umgebungsbedingungen entsprechend,

beide oder nur eine derselben zur Auswirkung gelangt. Tragen beide Glieder der Gl. (a) zur Erscheinungsbildung bei, so liegt der Fall der Doppelnatrur des Prozesses vor. Tatsächlich ist es in Gl. (11) mit Verwendung elementarer Mittel gelungen, das Wärmeleitungsgegesetz in eine der Beziehung Gl. (a) wesensähnliche Form zu bringen, da mit

$$(b) \quad \frac{s}{c} = t^*$$

gilt:

$$(c) \quad 0 = \{ \varrho C p(w, \text{grad } \vartheta) + \lambda \Delta^2 \vartheta \} + t^* \cdot \{ \lambda \cdot \text{div} (\Delta(w, \vartheta)) \}.$$

Fürth müßte erst zeigen, daß das strukturbedingte Glied sich zu Null auflöst, da sich der Beschleunigungseffekt als ein mit den hier angewandten Mitteln nicht erfassbarer Effekt zweiter Ordnung darstellt, anderenfalls entbehren seine ohne tiefere Erklärung hingeworfenen Behauptungen nicht nur jeder Grundlage, sondern sind, wie eine hier nicht näher ausgeführte Überlegung über den mit einer Beschleunigung des Mittels verbundenen Wärmeübergang an Grenzflächen zeigen würde, als falsch anzusehen.

In seinem unter Punkt 3 gegebenen Ausführungen ist Herrn Fürth eine Fehlleistung unterlaufen, die u.a. darin ihren Ausdruck findet, daß das Ergebnis seiner Überlegungen zu einer unendlichen Ausbreitungstiefe führt, während er in Punkt 1, wie bereits anfangs gezeigt, selbst das Gegenteil festgestellt. Er wiederholt dort die Ableitung der Temperaturverteilung im Heißdampfkern bei Kondensation von Heißdampf, wie sie seit langem bekannt ist<sup>1)</sup> und wie ich sie für den inversen Fall in meiner Arbeit unter Gl. 1—3 selbst gegeben habe.

Es ist richtig, daß meine Entwicklungen in Abschn. IV, Gl. (12—17) einer Revision bedürfen, aber keineswegs in dem von Herrn Fürth angegebenen Sinne, sondern auf ganz anderer Grundlage.

Bevor auf diese Frage näher eingegangen sei, werde vorerst kurz geschildert, wie der Verf. an dieser Stelle zu einer nicht einwandfreien Ableitung gelangte: Auf Grund eigener meßtechnischer Untersuchungen über die Temperaturverteilung im Heißdampfkern gelangte der Verf. auf rein induktivem Wege zur Erkenntnis, daß eine kritische Translationsgeschwindigkeit bestehen muß, über die hinaus eine Wärmeleitung entgegen der Bewegungsrichtung des Mittels grundsätzlich nicht mehr möglich ist. Da nun die durchgeführte Ableitung zwanglos das Bestehen einer solchen, von vorn-

1) W. Stender, Ztschr. VDI. 69. S. 905. 1925.

herein erwarteten, kritischen Geschwindigkeit, und zwar beim Wert  $w_K = 2\xi$ , sowie eine endliche Tiefe der Abkühlungszone (Gl. 17) ergab, hat der Verf. die Mängel dieser Entwicklung übersehen. Wie gleich vorweggenommen sei, ergibt sich als richtiger Wert der kritischen Geschwindigkeit  $w_K = \xi$  bei Anwendung der elementaren Methode, bei Verfeinerung der mathematischen Mittel wird sich eine in dieser Gegend liegende Größe ergeben. Jedenfalls sind im wesentlichen die in Abschn. IV gezogenen Folgerungen richtig, nur größtmäßig sind Änderungen vorzunehmen.

Die folgerichtige Fortführung der von mir angestellten Untersuchungen zeigt, daß nicht nur bei Vorhandensein eines Beschleunigungszustandes, sondern bereits bei gleichförmig bewegtem Mittel der Einfluß der Molekularstruktur der Materie auf den Wärmeleitungsvorgang in Erscheinung tritt. In der analytischen Entwicklung gelangt die Berücksichtigung dieses Geschwindigkeitseinflusses darin zum Ausdruck, daß der differentielle Übergang der Wegstrecke, über die sich die Betrachtung des elementaren Vorganges bezieht und die bei Gasen in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge liegt, im Gegensatz zu den bei Annahme kontinuierlicher Bauform der Materie gültigen Schlußweisen, nicht vollzogen werden darf und womit das Abbrechen der entsprechenden Reihenentwicklungen nach dem Gliede der ersten Potenz unzulässig wird.

Die Durchführung dieses Gedankenganges kann hier raumangels nicht entwickelt werden, ein kurzer Abriß samt Angabe der gefundenen Ergebnisse findet sich im Gesundh.-Ing. (Verlag R. Oldenbourg, München) 1936, Heft 31, S. 466.

In der Tatsache des Bestehens einer kritischen Geschwindigkeit, der hier eine zentrale Bedeutung zukommt, liegt das Wesen der Strukturabhängigkeit des Wärmeleitungsvorganges beschlossen. An diesem entscheidenden Punkt, in dem schließlich der ganze hier aufgeworfene Fragenkomplex mündet, gehen die Ausführungen von Herrn Fürth achtlos vorüber.

Jägerndorf, Juli 1936.

(Eingegangen 16. Juli 1936)

**Die Wärmeleitungsgegesetze in bewegten Medien**  
**Erwiderung auf die „Entgegnung“<sup>1)</sup> von Herrn M. Lang**  
**Von Reinhold Fürth**

(Aus dem physikalischen Institut der Deutschen Universität in Prag)

Auf die in der vorhergehenden Notiz von Herrn M. Lang enthaltenen Ausführungen habe ich nur wenig zu erwiedern. Daß das von Lang<sup>2)</sup> behandelte Problem sinnvoll und von physikalischem Interesse sei, habe ich nie bezweifelt und diese meine Ansicht geht auch aus meinen „Bemerkungen“<sup>3)</sup> wie ich glaube, klar genug hervor. Eben deshalb erschien es mir der Mühe wert, die Leser der „Annalen“ auf die Irrtümer und Inkorrekttheiten in der Arbeit von Lang hinzuweisen, um dadurch zu einer neuen Behandlung des Problems mit verbesserten Hilfsmitteln anzuregen. Ich hatte geglaubt, mich hierbei möglichst kurz fassen zu müssen, da ja eine ausführliche Kritik der Langschen Arbeit für die Leser dieser Zeitschrift ohne Interesse wäre. Daß Herr Lang selbst meine Ausführungen so gründlich mißverstehen würde, wie es aus seiner Notiz hervorgeht, konnte ich allerdings nicht ahnen. Um nur ein Beispiel herauszugreifen: In Punkt 3 meiner „Bemerkungen“ habe ich doch bloß gezeigt, daß auf Grund der von ihm selbst verwendeten Differentialgleichungen bei korrekt mathematischer Lösung des vorliegenden Randwertproblems für den stationären Fall eine Ausbreitung der Wärme bis ins Unendliche herauskommt, im Gegensatz zu der von Lang angegebenen unrichtigen Lösung; ich habe also keineswegs behauptet, daß eine *richtige* Molekulartheorie der Wärmeleitung eine Ausbreitung der Wärme bis ins Unendliche ergibt, vielmehr bloß bewiesen, daß die Theorie von Lang *unrichtig* sein muß. Ich muß demnach alle von Herrn Lang in seiner Notiz gegen mich ausgesprochenen Vorwürfe, insbesondere den, daß in meinen „Bemerkungen“ Widersprüche enthalten seien, entschieden zurückweisen.

1) M. Lang, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 472. 1936.

2) M. Lang, Ann. d. Phys. [5] 24. S. 393. 1935.

3) R. Fürth, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 256. 1936.

Prag, September 1936.

(Eingegangen 23. September 1936)